

Fractions

Prérequis

Règles de calcul sur les fractions.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\frac{32}{40}$

c) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

b) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

d) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\frac{2}{4} - \frac{1}{3}$

c) $\frac{36}{25} \times \frac{15}{12} \times 5$

b) $\frac{2}{3} - 0,2$

d) $-\frac{2}{15} \div \left(-\frac{6}{5}\right)$

Calcul 1.3



Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)$

b) $\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

d) $\frac{1\,978 \times 1\,979 + 1\,980 \times 21 + 1958}{1\,980 \times 1\,979 - 1\,978 \times 1\,979}$

Calcul 1.4 — Un petit calcul.



Écrire $\frac{0,5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0,5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0,2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3,5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Calcul 1.5 — Le calcul littéral à la rescousse.



En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\frac{2\,022}{(-2\,022)^2 + (-2\,021)(2\,023)}$

c) $\frac{1\,235 \times 2\,469 - 1\,234}{1\,234 \times 2\,469 + 1\,235}$

b) $\frac{2\,021^2}{2\,020^2 + 2\,022^2 - 2}$

d) $\frac{4\,002}{1\,000 \times 1\,002 - 999 \times 1\,001}$

Calcul 1.6 — Les fractions et le calcul littéral.



Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

- a) $\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- b) $\frac{a^3 - b^3}{(a-b)^2} - \frac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux.
- c) $\frac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1, 2\}$

Calcul 1.7 — Le quotient de deux sommes de Gauss.



Simplifier $\frac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^n k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2}$

Calcul 1.8 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.



Soit $k \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a + \frac{b}{c}$ avec $b < c$.

- a) $\frac{29}{6}$ b) $\frac{k}{k-1}$... c) $\frac{3x-1}{x-2}$..

Calcul 1.9 — Un produit de fractions.



Soit $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. On donne $A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2}$ et $B = (1+t^2)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Calcul 1.10 — Règles de comparaison.



Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

- a) $\frac{3}{5} \dots \frac{5}{9}$ b) $\frac{12}{11} \dots \frac{10}{12}$ c) $\frac{125}{25} \dots \frac{105}{21}$

Calcul 1.11 — Produit en croix.



Les nombres $A = \frac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \frac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux? Oui ou non?

Calcul 1.12 — Produit en croix.



On pose $A = \frac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B = \frac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A > B$, $A = B$ ou $A < B$?

Puissances

Prérequis

Opérations sur les puissances (produits, quotients), décomposition en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Calcul 2.1



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ <input type="text"/>	c) $\frac{10^5}{10^3}$ <input type="text"/>	e) $\frac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ <input type="text"/>
b) $(10^5)^3$ <input type="text"/>	d) $\frac{10^{-5}}{10^{-3}}$ <input type="text"/>	f) $\frac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.2



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ <input type="text"/>	c) $\frac{2^5}{2^{-2}}$ <input type="text"/>	e) $\frac{6^5}{2^5}$ <input type="text"/>
b) $(5^3)^{-2}$ <input type="text"/>	d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ <input type="text"/>	f) $\frac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.3



Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\frac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ <input type="text"/>	c) $\frac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ <input type="text"/>
b) $2^{21} + 2^{22}$ <input type="text"/>	d) $\frac{(3^2 \cdot (-2)^4)^8}{((-3)^5 \cdot 2^3)^{-2}}$ <input type="text"/>

Calcul 2.4



Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\frac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ <input type="text"/>	c) $\frac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ <input type="text"/>
b) $\frac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ <input type="text"/>	d) $\frac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ <input type="text"/>

Calcul 2.5



Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x .

a) $\frac{x}{x-1} - \frac{2}{x+1} - \frac{2}{x^2-1}$ <input type="text"/>	c) $\frac{x^2}{x^2-x} + \frac{x^3}{x^3+x^2} - \frac{2x^2}{x^3-x}$ <input type="text"/>
b) $\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x-2} + \frac{8}{x^2-4}$ <input type="text"/>	d) $\frac{1}{x} + \frac{x+2}{x^2-4} + \frac{2}{x^2-2x}$ <input type="text"/>

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.



Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$

d) $\sqrt{(2 - \sqrt{7})^2}$

b) $\sqrt{(\sqrt{3} - 1)^2}$

e) $\sqrt{(3 - \pi)^2}$

c) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$

f) $\sqrt{(3 - a)^2}$

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.



Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$

e) $(3 + \sqrt{7})^2 - (3 - \sqrt{7})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})^2$

f) $(\sqrt{2\sqrt{3}})^4$

c) $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

g) $\left(\frac{5 - \sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

d) $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}}$

h) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3



Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}}$

e) $\frac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$

c) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

g) $\frac{5 + 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{5 - 2\sqrt{6}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$

d) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

h) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} \dots\dots\dots \boxed{}$$

Calculs variés**Calcul 4.5 — Avec une variable.**On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

- | | | | |
|--|----------------------|--------------------------------|----------------------|
| a) $f(x) + \frac{1}{f(x)}$ | <input type="text"/> | d) $\frac{f'(x)}{f(x)}$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ | <input type="text"/> | e) $f(x) + 4f''(x)$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{x+2f(x)}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{f(x)}{f''(x)}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

- | | | | |
|--|----------------------|--|----------------------|
| a) $\sqrt{3 + \sqrt{5}} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | b) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> |
|--|----------------------|--|----------------------|

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\frac{3 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}$ | <input type="text"/> | d) $3 \exp^{-\frac{1}{2} \ln 3}$ | <input type="text"/> |
| b) $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ | <input type="text"/> | e) $2\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$ | <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$ | <input type="text"/> | f) $\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$ | <input type="text"/> |

Calcul 4.8

Simplifier $\sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$.

On commencera par exprimer A^3 en fonction de A

Prérequis
 Les identités remarquables !

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. Idéalement, on écrira directement le résultat. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1



Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x .

- | | |
|---|--|
| a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3 \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | d) $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(x - 1)^3(x^2 + x + 1) \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | e) $(x - 1)^2(x + 1)(x^2 + x + 1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) \dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> | f) $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \dots\dots\dots$ <input style="width: 100px; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 3.2



Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x .

- | | |
|--|--|
| a) $(x - 2)^2(-x^2 + 3x - 1) - (2x - 1)(x^3 + 2) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $(2x + 3)(5x - 8) - (2x - 4)(5x - 1) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $\left((x + 1)^2(x - 1)(x^2 - x + 1) + 1\right)x - x^6 - x^5 + 2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $(x + 1)(x - 1)^2 - 2(x^2 + x + 1) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| e) $(x^2 + \sqrt{2}x + 1)(1 - \sqrt{2}x + x^2) \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| f) $(x^2 + x + 1)^2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.



Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

- | | |
|---|--|
| a) $-(6x + 7)(6x - 1) + 36x^2 - 49 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| b) $25 - (10x + 3)^2 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| c) $(6x - 8)(4x - 5) + 36x^2 - 64 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |
| d) $(-9x - 8)(8x + 8) + 64x^2 - 64 \dots\dots\dots$ | <input style="width: 90%; height: 20px;" type="text"/> |

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.



Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ (où $a \neq 0$).

- | | | | |
|-------------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 2x + 1$ | <input type="text"/> | d) $3x^2 + 7x + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 4x + 4$ | <input type="text"/> | e) $2x^2 + 3x - 28$ | <input type="text"/> |
| c) $x^2 + 3x + 2$ | <input type="text"/> | f) $-5x^2 + 6x - 1$ | <input type="text"/> |

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | | | |
|--------------------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $(x + y)^2 - z^2$ | <input type="text"/> | d) $xy - x - y + 1$ | <input type="text"/> |
| b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ | <input type="text"/> | e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$.. | <input type="text"/> |
| c) $xy + x + y + 1$ | <input type="text"/> | f) $y^2(a^2 + b^2) + 16x^4(-a^2 - b^2)$.. | <input type="text"/> |

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.



Factoriser sur \mathbb{R} les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

- | | |
|---|----------------------|
| a) $x^4 - 1$ | <input type="text"/> |
| b) $(-9x^2 + 24)(8x^2 + 8) + 64x^4 - 64$ | <input type="text"/> |
| c) $x^4 + x^2 + 1$ | <input type="text"/> |
| d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ | <input type="text"/> |
| e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.. | <input type="text"/> |

Équations du second degré

Prérequis

Relations entre coefficients et racines.

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du le discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.



Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi 0, 1, -1, 2, -2 ainsi éventuellement que 3 et -3.*

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

g) $2x^2 + 3 = 0$

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

i) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

e) $x^2 - 5x = 0$

j) $5x^2 + 24x + 19 = 0$

Calcul 6.2 — Somme et produit.



Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.



Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine

Calcul 6.4 — Racine évidente.



Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

Seuls les deux derniers calculs ne se font pas de tête.

- a) $(b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$
- b) $a(b - c)x^2 + b(c - a)x + c(a - b) = 0$
- c) $(x + a)(x + b) = (m + a)(m + b)$
- d) $(b - c)x^2 + (c - a)mx + (a - b)m^2 = 0$
- e) $\frac{x}{a} + \frac{b}{x} = \frac{m}{a} + \frac{b}{m}$
- f) $\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.



En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

- a) 9 et 13
- b) -11 et 17
- c) $2 + \sqrt{3}$ et $2 - \sqrt{3}$
- d) $m + \sqrt{m^2 - 3}$ et $m - \sqrt{m^2 - 3}$
- e) $m + 3$ et $\frac{2m - 5}{2}$
- f) $\frac{m + 1}{m}$ et $\frac{m - 2}{m}$

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.



Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

- a) $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = 0$
- b) $(m + 2)x^2 - 2(m - 1)x + 4 = 0$
- c) $(m + 3)x^2 + 2(3m + 1)x + (m + 3) = 0$

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.



Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x .

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x + 2)(ax + b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x - 1)(ax + b)$

c) $-3x^2 + 14x - 15 = (x - 3)(ax + b)$

d) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x - 40 = (x - 5)(ax + b)$

e) $x^2 + 2\sqrt{7}x - 21 = (x - \sqrt{7})(ax + b)$

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.



Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x + 1)(3x - 2)$

d) $\frac{x - 4}{2x + 1}$

Trigonométrie

Prérequis

Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos.
Formules d'addition et de duplication. Fonction tangente.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1



Simplifier :

a) $\cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{7\pi}{4}$.

c) $\tan \frac{2\pi}{3} + \tan \frac{3\pi}{4} + \tan \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6}$

b) $\sin \frac{5\pi}{6} + \sin \frac{7\pi}{6}$

d) $\cos^2 \frac{4\pi}{3} - \sin^2 \frac{4\pi}{3}$

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.2



Simplifier :

a) $\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

b) $\sin(-x) + \cos(\pi + x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

d) $\cos(x - \pi) + \sin\left(-\frac{\pi}{2} - x\right)$

Formules d'addition

Calcul 8.3



Calculer les quantités suivantes.

a) $\cos \frac{5\pi}{12}$ (on a $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$)

c) $\sin \frac{\pi}{12}$

b) $\cos \frac{\pi}{12}$

d) $\tan \frac{\pi}{12}$

Calcul 8.4



a) Simplifier : $\sin(4x) \cos(5x) - \sin(5x) \cos(4x)$

b) Simplifier : $\frac{\sin 2x}{\sin x} - \frac{\cos 2x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Simplifier : $\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

d) Expliciter $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$

Formules de duplication

Calcul 8.5



En remarquant qu'on a $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos \frac{\pi}{8}$

b) $\sin \frac{\pi}{8}$

Calcul 8.6



a) Simplifier : $\frac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ (avec $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

b) Simplifier : $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x}$ (pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

c) Expliciter $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$

Équations trigonométriques

Calcul 8.7



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{1}{2}$

f) $|\tan x| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sin x = \cos \frac{2\pi}{3}$

h) $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

d) $\tan x = -1$

i) $\cos x = \cos \frac{\pi}{7}$

e) $\cos^2 x = \frac{1}{2}$

j) $\sin x = \cos \frac{\pi}{7}$

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8



Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\tan x \geq 1$

b) $\cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$

f) $|\tan x| \geq 1$

c) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

g) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

d) $|\sin x| \leq \frac{1}{2}$

h) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \geq 0$

Exponentielles

Calcul 7.5



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3 \ln 2}$

d) $e^{-2 \ln 3}$

b) $\ln(\sqrt{e})$

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$

f) $e^{\ln 3 - \ln 2}$

Calcul 7.6



Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-e^{-\ln \frac{1}{2}}$

d) $\ln(\sqrt{e^4}) - \ln(\sqrt{e^2})$

b) $e^{-\ln \ln 2}$

e) $\ln(\sqrt{\exp(-\ln e^2)})$

c) $\ln\left(\frac{1}{e^{17}}\right)$

f) $\exp\left(-\frac{1}{3} \ln(e^{-3})\right)$

Études de fonctions

Calcul 7.7 — Parité.



Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \mapsto \ln \frac{2021 + x}{2021 - x}$

b) $f_2 : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

c) $f_3 : x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

d) $f_4 : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Calcul 7.8 — Étude d'une fonction.



Soit $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Montrer que pour tous réels a et b on a $f(a + b) = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$

c) Déterminer la limite de f en $+\infty$

d) Déterminer la limite de f en $-\infty$

Calcul 7.9



On considère l'application

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \ln(1+x) \end{cases}$$

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

- a) $f(2e^x - 1)$ d) $xf'(x) - 1$
- b) $e^{x - \frac{1}{2}f(x)}$ e) $e^{\frac{f(x)}{f'(x-1)}}$
- c) $\frac{1}{2}f(x^2 - 2x)$

Équations, inéquations

Calcul 7.10



Résoudre les équations ou inéquations suivantes.

- a) $e^{3x-5} \geq 12$
- b) $1 \leq e^{-x^2+x}$
- c) $e^{1+\ln x} \geq 2$
- d) $e^{-6x} \leq \sqrt{e}$
- e) $\ln(-x-5) = \ln(x-61) - \ln(x+7)$
- f) $\ln(-x-5) = \ln \frac{x-61}{x+7}$

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Application des formules usuelles

Calcul 9.1 — Avec des produits.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6) \exp(2x)$

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x) \ln(x - 2)$

Calcul 9.2 — Avec des puissances.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2 \cos(x))^2$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3 \cos(x) - \sin(x))^3$

Calcul 9.3 — Avec des fonctions composées.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x) \exp(x^2 + x)$

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3 \sin(2x))$

Calcul 9.4 — Avec des fonctions composées — bis.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin\left(\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}\right)$

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \cos\left(\frac{2x + 1}{x^2 + 4}\right)$

c) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$

d) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin(\sqrt{x})$

Calcul 9.5 — Avec des quotients.



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{2 \sin(x) + 3}$

b) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3x + 2}$

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \frac{\cos(2x + 1)}{x^2 + 1}$

d) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$

Opérations et fonctions composées

Calcul 9.6



Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

b) $x \in]-3, 3[$ et $f(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}}\right)$

d) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 9.7



Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3, -2\}$ et $f(x) = \frac{1}{3-x} + \frac{1}{2+x}$

b) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$

c) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \frac{x+2}{x-1}$

d) $x \in]-1, +\infty[$ et $f(x) = \frac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$

e) $x \in]0, e[\cup]e, +\infty[$ et $f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{1 - \ln(x)}$

Primitives

Prérequis

Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque. Trigonométrie hyperbolique.

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 10.1



Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\frac{1}{t+1}$

c) $\frac{3}{(t+2)^3}$

b) $\frac{3}{(t+2)^2}$

d) $\sin(4t)$

Calcul 10.2



Même exercice.

a) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$

c) $\frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}$

b) e^{2t+1}

d) $\frac{1}{1+9t^2}$

Utilisation des formules

Calcul 10.3 — Dérivée d'une fonction composée.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\frac{2t^2}{1+t^3}$

d) $\frac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$

b) $t\sqrt{1+2t^2}$

e) $\frac{t}{1+3t^2}$

c) $\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}$

f) $\frac{12t}{(1+3t^2)^3}$

Calcul 10.4 — Dérivée d'une fonction composée – bis.



Même exercice.

a) $\frac{\ln^3 t}{t}$

d) $\frac{1}{t^2\sqrt{t}}$

b) $\frac{1}{t\sqrt{\ln t}}$

e) $\frac{e^t + e^{-t}}{1 - e^{-t} + e^t}$

c) $\frac{8e^{2t}}{(3 - e^{2t})^3}$

f) $\frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}$

Calcul 10.5 — Trigonométrie.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\cos^2 t \sin t$ <input type="text"/> | g) $\tan^2 t$ <input type="text"/> | l) $\frac{\cos t}{(1 - \sin t)^3}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t)e^{\sin t}$ <input type="text"/> | h) $\tan^3 t$ <input type="text"/> | m) $\frac{1}{1 + 4t^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\tan t$ <input type="text"/> | i) $\frac{\tan^3 t}{\cos^2 t}$ <input type="text"/> | n) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{\cos t}{1 - \sin t}$ <input type="text"/> | j) $\frac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan t}}$ <input type="text"/> | o) $\frac{\text{Arcsin}(t)}{\sqrt{1 - t^2}}$ <input type="text"/> |
| e) $\frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | k) $\frac{1 + \tan^2 t}{\tan^2 t}$ <input type="text"/> | p) $\frac{1}{\sqrt{1 - t^2}\text{Arcsin}(t)}$ <input type="text"/> |
| f) $\frac{\cos(\pi \ln t)}{t}$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.6 — Trigonométrie – bis.



Déterminer une primitive des expressions suivantes en utilisant d'abord le formulaire de trigonométrie.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\cos^2 t$ <input type="text"/> | d) $\frac{\sin(2t)}{1 + \sin^2 t}$ <input type="text"/> | f) $\frac{1}{\sin^2(t) \cos^2(t)}$ <input type="text"/> |
| b) $\cos(t) \sin(3t)$ <input type="text"/> | e) $\frac{1}{\sin t \cos t}$ <input type="text"/> | g) $\frac{1}{\sin(4t)}$ <input type="text"/> |
| c) $\sin^3 t$ <input type="text"/> | | |

Calcul 10.7 — Fractions rationnelles.



Déterminer une primitive des expressions suivantes après quelques manipulations algébriques simples.

- | | | |
|---|---|---|
| a) $\frac{t^2 + t + 1}{t^2}$ <input type="text"/> | d) $\frac{t^3 + 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{t^2 + 1}{t^3}$ <input type="text"/> | e) $\frac{t - 1}{t + 1}$ <input type="text"/> | h) $\frac{t}{(t + 1)^2}$ <input type="text"/> |
| c) $\frac{1 - t^6}{1 - t^2}$ <input type="text"/> | f) $\frac{t^3}{t + 1}$ <input type="text"/> | |

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 10.8



Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- intégrer l'expression.

- | | |
|---|--|
| a) $t^2 - 2t + 5$ <input type="text"/> | e) $e^{2t} + e^{-3t}$ <input type="text"/> |
| b) $\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}$ <input type="text"/> | f) e^{3t-2} <input type="text"/> |
| c) $\sqrt{t} - \frac{1}{t^3}$ <input type="text"/> | g) $\frac{t^2}{t^3 - 1}$ <input type="text"/> |
| d) $\frac{1}{t^4} + \frac{1}{t\sqrt{t}}$ <input type="text"/> | h) $\frac{3t - 1}{t^2 + 1}$ <input type="text"/> |

i) $\sin(t) \cos^2(t) \dots$

j) $\sinh(t) \cosh(t) \dots$

k) $\frac{1}{t^2} \sin \frac{1}{t} \dots$

l) $\frac{e^t}{2 + e^t} \dots$

m) $\frac{\sin t}{2 + 3 \cos t} \dots$

n) $\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} \dots$

o) $\frac{\sin 2t}{1 + \cos^2 t} \dots$

p) $te^{-t^2} \dots$

q) $\frac{1 - \ln t}{t} \dots$

r) $\frac{1}{t \ln t} \dots$

s) $\frac{\sin(\ln t)}{t} \dots$

t) $\frac{e^t}{1 + e^{2t}} \dots$

Calcul 10.9 — *Bis repetita.*



Reprenre l'exercice précédent en commençant par intégrer puis en dérivant et factorisant.