Formulaire de Trigonométrie Circulaire

① Relation fondamentale

Pour tous réels x et y, on a $x^2 + y^2 = 1$ si, et seulement si, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.

② Périodicités et symétries

Pour tous réels $\theta \in \mathbb{R}$ et $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), on a

$$\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta \qquad \cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta \qquad \tan(\varphi + 2\pi) = \tan\varphi$$

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\varphi) = -\tan\varphi$$

$$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta \qquad \cos(\theta + \pi) = -\cos\theta \qquad \tan(\varphi + \pi) = \tan\varphi$$

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \cos\theta \qquad \cos(\tfrac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta \qquad \tan(\tfrac{\pi}{2} - \varphi) = 1/\tan\varphi$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta \qquad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta \qquad \tan(\pi - \varphi) = -\tan\varphi$$

$$1 + \tan^2\varphi = 1/\cos^2\varphi$$

③ Formules d'addition

Pour tous réels a et $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$
$$\sin(2a) = 2\sin a \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\text{si } a + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\text{si } a - b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

$$\text{si } a \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \qquad \tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

④ Formules de factorisation

Pour tous réels p et $q \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$