# Comparaisons de sommes et d'intégrales

Soit $f$ une fonction numérique définie sur l'intervalle $]\,0\,;+\infty\,[$. On cherche à étudier le comportement asymptotique de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall\, n \geqslant 1 \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

Cette somme est, dans la majorité des cas, impossible à calculer. Pour cette raison, on va l'encadrer par deux intégrales de $f$, qui sont beaucoup plus faciles à estimer.

Dans cette étude, on supposera que **la fonction $f$ est positive et décroissante**.

## 1) Variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Soit un entier $n \geqslant 1$. On a alors $u_n = f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$ et

$$u_{n+1} = \Big[f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\Big] + f(n+1) = u_n + f(n+1)$$

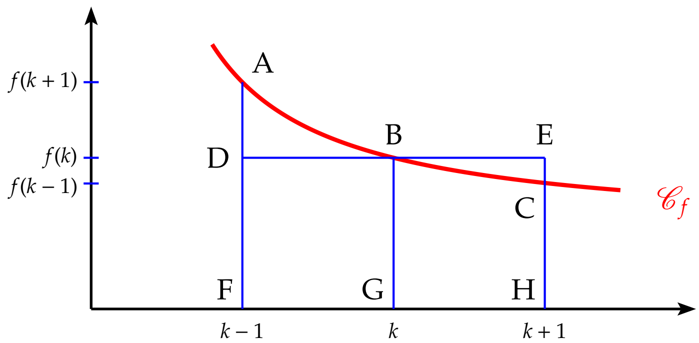
si bien que

$$u_{n+1} - u_n = f(n+1) \geqslant 0$$

Ainsi, $\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$

## 2) Encadrement de $f(k)$ par des intégrales

Soit $k \geqslant 2$. Voici la représentation de la fonction $f$ sur l'intervalle $[\,k-1\,;k+1\,]$.




Comme la courbe de $f$ a pour équation $y = f(x)$, les points A, B et C ont pour ordonnées respectives $f(k-1)$, $f(k)$ et $f(k+1)$.

❶ Sur l'intervalle $[\,k-1\,;k\,]$, le domaine ABGF entre la courbe et l'axe des abscisses contient le rectangle BDFG. De ce fait, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(k)$

❷ Sur l'intervalle $[\,k\,;k+1\,]$, le domaine BCHG entre la courbe et l'axe des abscisses est contenu dans le rectangle BEHG. De ce fait, $\displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$

Ainsi,

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 2 \qquad \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \textbf{(1)}$$

## 3) Encadrement de $u_n$ par des intégrales

Soit $n \geqslant 2$. Utilisons le résultat précédent pour encadrer les réels $f(2), f(3), \ldots, f(n)$.

Pour $k = 2$ : $$\int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(2) \leqslant \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $k = 3$ : $$\int_3^4 f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(3) \leqslant \int_2^3 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Pour $k = n$ : $$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=2}^{n} f(k) \leqslant \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

d'où en ajoutant $f(1)$ à chaque membre

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1 \qquad f(1) + \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \textbf{(2)}$$

**Remarque :** si $f$ est croissante, les inégalités sont inversées dans les relations **(1)** et **(2)**.

## 4) Utilisation de l'encadrement de $u_n$

Deux cas de figure vont se présenter

❶ Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$, on déduit du théorème de minoration que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$

Avec un peu de chance, l'encadrement **(2)** permet aussi d'obtenir un équivalent de $u_n$.

❷ Si $\displaystyle\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée, donc convergente.

## 5) Cas des séries de Riemann $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 0$

Dans ce cas, $f : x \longmapsto 1/x^\alpha$ est bien une fonction positive et décroissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

❶ Si $0 < \alpha < 1$

Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors $f(1) = 1$,

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$$

et $$\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_2^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-\alpha} - 2^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Ainsi $$1+\frac{(n+1)^{1-\alpha}-2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \qquad \text{d'après } \textbf{(2)}$$

Comme $1-\alpha>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^{1-\alpha}=+\infty$ et l'on déduit du Théorème de Minoration que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

De plus, les deux termes encadrant $u_n$ ont pour équivalent $\dfrac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$, si bien que

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}$$

❷ Si $\alpha = 1$

Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors $f(1)=1$,

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln t\Big]_1^n = \ln(n)$$

et $$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \Big[\ln t\Big]_2^{n+1} = \ln(n+1)-\ln 2$$

d'où $$1+\ln(n+1)-\ln 2 \leqslant u_n \leqslant 1+\ln(n) \qquad \text{d'après } \textbf{(2)}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=+\infty$, on déduit du théorème de minoration que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

De plus, les deux termes encadrant $u_n$ ont pour équivalent $\ln(n)$ car

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln(n)+\frac{1}{n}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

si bien que $$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$$

❸ Si $\alpha > 1$

Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors $f(1)=1$ et on déduit de **(2)** que

$$1+\frac{(n+1)^{1-\alpha}-2^{1-\alpha}}{1-\alpha} \leqslant u_n \leqslant 1+\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \qquad \text{d'après } \textbf{(2)}$$

comme dans le premier cas. Cette fois-ci, $\alpha-1>0$ d'où

$$u_n \leqslant 1+\frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = 1+\frac{1-n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant 1+\frac{1}{\alpha-1}$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers un réel } \ell.}$$

## 6) Encadrement de $\ell - u_n$ lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ell$

Soit un entier $n \geqslant 1$ : on a $$\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

d'où $$\ell - u_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$$

Soit $\mathrm{N} \geqslant n+1$ ; utilisons la relation **(1)** pour encadrer les réels $f(n+1), f(n+2), \ldots, f(\mathrm{N})$ :

Pour $k = n+1$ : $$\int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+1) \leqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour $k = n+2$ : $$\int_{n+2}^{n+3} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+2) \leqslant \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Pour $k = \mathrm{N}$ : $$\int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(\mathrm{N}) \leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{\mathrm{N}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En additionnant membre à membre ces inégalités, on obtient via la relation de Chasles

$$\int_{n+1}^{\mathrm{N}+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} f(k) \leqslant \int_{n}^{\mathrm{N}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, on en déduit que

$$\boxed{\forall\, n \geqslant 1 \qquad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \ell - u_n \leqslant \int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t} \qquad \textbf{(3)}$$

## 7) Application au cas $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

Dans ce cas, on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell$. Soit un entier $n \geqslant 1$. Alors

$$\int_{n}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n}^{+\infty} = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1} \qquad \text{et} \qquad \int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

En effet, $$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = 0 \ \text{ puisque } 1-\alpha < 0 \qquad \text{et} \qquad -\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Par conséquent, $$\frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \ell - u_n \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$ d'après **(3)**

si bien que $$\boxed{\ell - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}}$$