La résolution des systèmes linéaires

1) Généralités

Définition

*On appelle **système linéaire** de n équations à p inconnues* $x_1, x_2, \dots, x_p \in \mathbb{R}$ *tout système*

$$(S) \quad \begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,p}\,x_p = b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,p}\,x_p = b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots & \\ a_{n,1}\,x_1 + a_{n,2}\,x_2 + \cdots + a_{n,p}\,x_p = b_n & (\mathrm{L}_n) \end{cases}$$

où les coefficients $a_{i,j}$ *et les données* b_i *(pour* $1 \leqslant i \leqslant n$ *et* $1 \leqslant j \leqslant p$*) sont des réels fixés.*
On note $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2, \dots, \mathrm{L}_n$ *les lignes du système.*

Définition *On dit que deux systèmes sont **équivalents** s'ils ont le même ensemble de solutions.*

Définition *Les **opérations élémentaires sur les lignes** d'un système linéaire sont :*

1) *l'échange de deux lignes ;*
2) *la multiplication d'une ligne par un réel non nul ;*
3) *l'addition d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.*

Proposition

Ces opérations élémentaires transforment tout système linéaire en un système équivalent.

2) Systèmes échelonnés

Définition *Un système linéaire est dit **échelonné** lorsque le nombre de coefficients nuls en début d'équation croît d'une ligne à la suivante.*

*On appelle alors **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.*

Définition *Un système échelonné est dit **normalisé** si tous ses pivots valent à 1.*

Définition *Le **rang** d'un système échelonné est le nombre de pivots.*

3) L'algorithme du pivot de Gauss-Jordan

Voici comment transformer tout système linéaire de n équations à p inconnues en un système échelonné normalisé.

❶ On choisit une ligne dont le coefficient de x_1 est non nul (si possible égal à 1).
On la place en première position.

❷ On ajoute des multiples de cette ligne aux autres lignes afin d'éliminer la variable x_1.

❸ On réapplique le procédé au système de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues ainsi obtenu.

❹ On répète ceci jusqu'à l'apparition d'un système échelonné, que l'on normalise alors.

4) Résolution d'un système échelonné

Soit un système linéaire échelonné à p inconnues de rang r.

❶ Si ce système comporte une équation du type $0 = b_m$ avec $b_m \neq 0$, alors il ne possède pas de solution.

Sinon, on compare son rang r au nombre d'inconnues p.

❷ Si $r = p$, on résout les équations depuis la fin, ce qui permet d'obtenir x_p, puis x_{p-1}, etc..., jusqu'à x_1. Le système possède ainsi une unique solution.

❸ Si $r < p$, on fait passer les termes en $x_{r+1}, \ldots, x_p$ au second membre. On procède comme précédemment afin d'exprimer les *inconnues principales* $x_1, x_2, \ldots, x_r$ en fonction des *inconnues secondaires* $x_{r+1}, \ldots, x_p$. Le système possède alors une infinité de solutions.