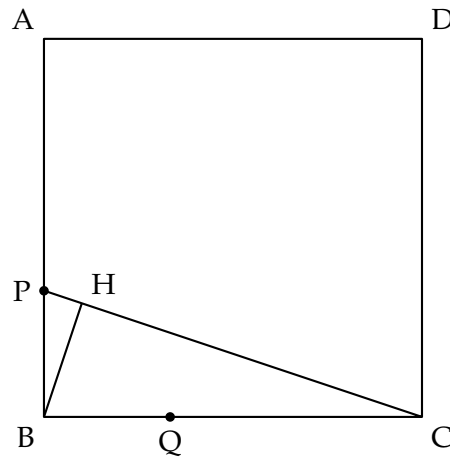


Exercice 1

Plaçons le point B en bas à gauche pour raisonner facilement dans le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



Dans ce repère, on a : $B(0;0)$, $C(1;0)$, $D(1;1)$, $A(0;1)$, $Q(1/3;0)$ et $P(0;1/3)$.

Équation de la droite (PC)

Pour $M(x; y) \in \mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{PM} \begin{pmatrix} x \\ y - 1/3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ donc

$$\det(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PC}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x & 1 \\ y - 1/3 & -1/3 \end{vmatrix} = 0 \iff -x/3 - y + 1/3 = 0$$

Ainsi, la droite (PC) a pour équation $x + 3y - 1 = 0$.

Équation de la droite (BH)

Elle admet $\overrightarrow{PC}$ pour vecteur normal, donc elle a une équation de la forme $x - y/3 + c = 0$.
De plus, elle passe par $B(0;0)$ donc $c = 0$.

Ainsi, la droite (BH) a pour équation $3x - y = 0$.

Coordonnées de H

Le point H étant l'intersection de ces deux droites, ses coordonnées sont les solutions du système formé par leurs équations. Or,

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3x \\ x + 9x = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1/10 \\ y = 3/10 \end{cases}$$

Ainsi, le projeté orthogonal de B sur (PC) est $H\left(\frac{1}{10}; \frac{3}{10}\right)$.

Perpendicularité de (QH) et (HD)

On en déduit que $\overrightarrow{QH} \begin{pmatrix} 1/10 - 1/3 = -7/30 \\ 3/10 = 9/30 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{HD} \begin{pmatrix} 9/10 \\ 7/10 \end{pmatrix}$ d'où

$$\overrightarrow{QH} \cdot \overrightarrow{HD} = -\frac{7}{30} \times \frac{9}{10} + \frac{9}{30} \times \frac{7}{10} = \frac{-63 + 63}{300} = 0$$

Ainsi $\overrightarrow{QH} \perp \overrightarrow{HD}$ et donc les droites (QH) et (HD) sont perpendiculaires.

Exercice 2

1) Pour $X(x, y, z)$ et $Y(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned}
 AX = Y &\iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ -y + z = c - a \end{cases} \iff \begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ 2z = b + c - a \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = a - y = a/2 - b/2 + c/2 \\ y = b - z = a/2 + b/2 - c/2 \\ z = -a/2 + b/2 + c/2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

2) De même, $BX = Y \iff \begin{cases} x + 2y + 4z = a \\ x + z = b \\ x - y + 4z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = b \\ -y + 3z = c - b \\ 3y = a - c \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = b - z = -a/9 + 4b/3 - 2c/9 \\ y = a/3 - c/3 \\ z = (y + c - b)/3 = a/9 - b/3 + 2c/9 \end{cases}$$

donc B est inversible et

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/9 & 4/3 & -2/9 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \\ 1/9 & -1/3 & 2/9 \end{pmatrix}$$

3) Enfin, $CX = Y \iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ -2x - 2y - z = b \\ y + 2z = c \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = a \\ y + 2z = c \\ 3z = b + 2a \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x = a - c \\ y = c - 2z = -4a/3 - 2b/3 + c \\ z = 2a/3 + b/3 \end{cases}$$

donc C est inversible et

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -4/3 & -2/3 & 1 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3

- 1) (a) • La fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ en tant que composée de fonctions usuelles et

$$\forall x \geq 0 \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2} \geq 0$$

De ce fait, la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$. Or, $f(0) = \ln(1) - 0 = 0$.

Il s'ensuit que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$, soit

$$\boxed{\ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1} \text{ pour tout } x \geq 0}$$

- De même, la fonction $g : x \mapsto x - \ln(x+1)$ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et

$$\forall x \geq 0 \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$$

Par conséquent, la fonction g est croissante sur $[0; +\infty[$.

De plus $g(0) = 0 - \ln(1) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ soit

$$\boxed{\ln(1+x) \leq x \text{ pour tout } x \geq 0}$$

- On déduit de ces deux inégalités que

$$\boxed{\forall x \geq 0 \quad \frac{x}{x+1} \leq \ln(1+x) \leq x}$$

- (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. L'encadrement ci-dessus appliqué au réel $x = \frac{1}{k}$ nous conduit à

$$\frac{1/k}{1+1/k} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

soit

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$$

d'où

$$\boxed{\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}}$$

- 2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Écrivons l'encadrement ci-dessus pour k allant de 1 jusqu'à n et sommons membres à membres les inégalités obtenues.

$$\frac{1}{2} \leq \ln(2) - \ln(1) \leq 1$$

$$\frac{1}{3} \leq \ln(3) - \ln(2) \leq \frac{1}{2}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$\frac{1}{n} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

- Membres de gauche : $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} = u_{n+1} - 1$

- Membres du centre : $\ln(2) - 0 + \ln(3) - \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(n+1)$

- Membres de droite : $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = u_n$

Ainsi, l'addition des n inégalités obtenues nous mène à

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - 1 \leq \ln(n+1) \leq u_n}$$

(b) On en déduit que $u_{n+1} \leq 1 + \ln(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $u_1 = 1 = 1 + \ln(1)$, on peut écrire que $u_n \leq 1 + \ln(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

De ce fait,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leq u_n \leq 1 + \ln(n)}$$

(c) On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n+1 = +\infty$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ par composition de limites.

On déduit du théorème de minoration que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$\begin{aligned} 3) \quad (a) \quad \text{Pour tout } n \geq 1 \quad v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - \ln(n+2) - u_n + \ln(n+1) \\ &= u_{n+1} - u_n + \ln(n+1) - \ln(n+2) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \end{aligned}$$

Or, $\ln(n+2) - \ln(n+1) \leq \frac{1}{n+1}$ soit $\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln(n+2) \geq 0$ (question 1.b).

En conséquence,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

(b) D'après la question 2.b, on a $u_n \leq 1 + \ln(n)$ si bien que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leq 1 + \ln(n) - \ln(n+1)}$$

(c) Par croissance de $\ln$, on a $\ln(n) \leq \ln(n+1)$ si bien que $v_n \leq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée par 1.

Comme elle est en outre croissante, alors

$$\boxed{\text{La suite } (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est convergente.}}$$

Problème 1

Partie A

1) Les solutions de l'équation différentielle homogène $y' = ay$ sont toutes les fonctions de la forme $f_C : t \mapsto C e^{at}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Pour une telle fonction, on a $f_C(0) = N_0 \iff C = N_0$.

Ainsi

$$\boxed{f : t \mapsto N_0 e^{at} .}$$

2) (a) Par définition du réel T , on a

$$f(T) = 2N_0 \iff N_0 e^{aT} = 2N_0 \iff e^{aT} = 2 \iff aT = \ln 2$$

si bien que

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{a} .}$$

(b) Il en découle que $a = \frac{\ln 2}{T}$ d'où

$$\boxed{\forall t \geq 0 \quad f(t) = N_0 e^{\frac{\ln 2}{T} t} = N_0 2^{\frac{t}{T}}}$$

Partie B

1) (a) Comme g est strictement positive et dérivable sur I , alors h l'est aussi et $h' = -\frac{g'}{g^2}$.

De ce fait

g est solution de **(E)**

$$\iff g' = ag \left(1 - \frac{g}{M}\right) = ag - \frac{ag^2}{M}$$

$$\iff -\frac{g'}{g^2} = -\frac{a}{g} + \frac{a}{M}$$

$$\iff h' = -ah + \frac{a}{M}$$

$$\iff h \text{ est solution de (F)}$$

(b) Équation Homogène

On sait que les solutions de l'équation différentielle $z' + az = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $z : t \mapsto C e^{-at}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Solution Particulière

Recherchons une solution constante $z_0 = \alpha$ de l'équation **(F)**.

$$\text{On a alors } z_0' + az_0 = a\alpha = \frac{a}{M} \text{ soit } \alpha = \frac{1}{M}.$$

Conclusion

Les solutions de l'équation **(F)** sont toutes les fonctions de la forme
avec $C \in \mathbb{R}$.

$$h_C : t \mapsto C e^{-at} + \frac{1}{M}$$

(c) D'après la question 1.(a), les solutions de **(F)** sont les inverses des solutions de **(E)**, et réciproquement. Ainsi, les solutions de **(E)** sont toutes les fonctions de la forme

$$g_C : t \mapsto \frac{1}{C e^{-at} + \frac{1}{M}} = \frac{M}{M C e^{-at} + 1} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}.$$

Enfin la fonction qui nous intéresse vérifie $g_C(0) = \frac{M}{M C + 1} = N_0$ soit $M C = \frac{M}{N_0} - 1$.

De ce fait,

$$g : t \mapsto \frac{M}{\left(\frac{M}{N_0} - 1\right) e^{-at} + 1} = \frac{M N_0}{(M - N_0) e^{-at} + N_0}$$

2) (a) • D'après **(E)**, on a $g'(t) = ag(t) \left(1 - \frac{g(t)}{M}\right) = ag(t) \times \frac{C e^{-at}}{1 + C e^{-at}} > 0$ pour tout $t \in I$

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur I . De plus, $g(0) = \frac{M}{1+C}$.

• Comme $a > 0$, alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} -at = -\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^{-at} = 0$ par composition de limites.

On obtient alors $\lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + C e^{-at}) = 1$ par produit et somme de limites,

si bien que $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = M$ par quotient de limites.

t	0	$+\infty$
$g'(t)$	+	
$g(t)$	$\frac{M}{1+C}$	M

Remarque : on sait maintenant à quoi correspond concrètement M !

(b) On a $g(t_0) = \frac{M}{2} \iff 1 + Ce^{-at_0} = 2 \iff e^{at_0} = C \iff t_0 = \frac{\ln C}{a}$

et ce nombre t_0 est bien strictement positif car $a > 0$ et $C > 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel positif } t_0 = \frac{\ln C}{a} \text{ tel que } g(t_0) = \frac{M}{2}.}$$

Remarque : ceci découle également du tableau de variations de g puisque

$$\frac{M}{1+C} < \frac{M}{2} < M$$

(c) D'après la relation (E), on a $g' = ag - \frac{ag^2}{M}$. Ceci montre que g' est dérivable et que

$$g'' = ag' - \frac{2agg'}{M} = ag' \left(1 - \frac{2g}{M}\right)$$

(d) On sait que $a > 0$ et $g' > 0$, si bien que $ag' > 0$. Ainsi, on a

$$g''(t) > 0 \iff 1 - \frac{2g(t)}{M} > 0 \iff g(t) < \frac{M}{2} \iff g(t) < g(t_0) \iff 0 \leq t < t_0$$

puisque g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$. En conséquence, on peut affirmer que $g'' > 0$ sur $[0; t_0[$ et que $g'' < 0$ sur $]t_0; +\infty[$.

De ce fait, g' est strictement croissante sur $[0; t_0]$ puis strictement décroissante sur $[t_0; +\infty[$: autrement dit, la vitesse d'accroissement du nombre de bactéries croît au début puis décroît à partir de l'instant t_0 déterminé précédemment (c'est un point d'inflexion).

Problème 2

Partie I – étude d'une fonction auxiliaire

- 1) La fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ en tant que somme de fonctions usuelles strictement croissantes. De plus, on a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par sommes de limites.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

- 2) ❶ la fonction f est continue (somme de fonctions continues) sur $]0; +\infty[$.
 ❷ f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 ❸ $0 \in \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$

On déduit alors du théorème de la bijection que

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \in]0; +\infty[.}$$

- 3) Comme $\frac{1}{e} < 1$, on a $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 < 0$. De plus, $f(1) = 1 + \ln(1) = 1 > 0$.

Ainsi $f\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(1)$ d'où $\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1}$ par stricte croissance de f .

Partie II – étude de l'équation $g(x) = x$

1) Pour tout $x > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 g(x) = x &\iff \frac{x - \ln x}{2} = x \\
 &\iff x - \ln x = 2x \\
 &\iff 0 = x + \ln x = f(x) \\
 &\iff x = \alpha
 \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\alpha \text{ est l'unique solution de l'équation } g(x) = x.}$$

2) (a) La fonction g est dérivable sur I (somme de fonctions usuelles dérivables) et

$$\forall x \in I \quad g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} = \frac{x-1}{2x} \leq 0$$

La fonction g est ainsi décroissante sur I .

De plus, elle admet pour minimum $g(1) = \frac{1}{2}$ et pour

maximum $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2}$.

x	$1/e$	1
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$1/2e + 1/2$	$1/2$

(b) Soit $x \in I$. D'après le tableau de variation, on a $g(1) \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{e}\right)$.

Or, $g(1) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{e}$ car $e < 2$ et $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} < 1$ car $\frac{1}{2e} \approx 0,2$.

On a de ce fait $\frac{1}{e} \leq g(1) \leq g(x) \leq g\left(\frac{1}{e}\right) \leq 1$.

Par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in I, \quad g(x) \in I}$$

3) (a) Pour tout $x \in I$, on a

$$\frac{1}{e} \leq x \leq 1$$

donc

$$1 \leq \frac{1}{x} \leq e \quad (\text{par décroissance de la fonction inverse})$$

et

$$-\frac{e}{2} \leq -\frac{1}{2x} \leq -\frac{1}{2}$$

si bien que

$$\frac{1-e}{2} \leq g'(x) \leq 0 \quad \left(\text{comme } g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2x} \right)$$

Ainsi

$$\boxed{\forall x \in I, \quad |g'(x)| \leq \frac{e-1}{2}}$$

(b) Soit $x \in I$. Comme $\alpha \in I$ (question I.3), on déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe un réel $c \in I$ (puisque compris entre x et α) tel que

$$g(x) - g(\alpha) = g'(c)(x - \alpha)$$

Or $g(\alpha) = \alpha$ (question II.1) donc

$$|g(x) - \alpha| = |g(x) - g(\alpha)| = |g'(c)| |x - \alpha|$$

Enfin $|g'(c)| \leq \frac{e-1}{2}$ d'après la question précédente, si bien que

$$\boxed{\forall x \in I, \quad |g(x) - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |x - \alpha|}$$

Partie III – étude d’une suite récurrente

1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll u_n \in I \gg$.

- *Initialisation* : $u_0 = 1 \in I = \left[\frac{1}{e}; 1 \right]$ donc la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
Ainsi, $u_n \in I$: il découle alors de la question II.2.b que $u_{n+1} = g(u_n) \in I$.
De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : d’après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c’est-à-dire que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I}$$

2) On vient de montrer que $u_n \in I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on peut donc appliquer le résultat de la question II.3.b à $x = u_n$. Par conséquent,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |g(u_n) - \alpha| = |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |u_n - \alpha|}$$

3) (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n \gg$.

- *Initialisation* : on a $u_0 = 1$ et $\alpha \in I = \left[\frac{1}{e}; 1 \right]$ donc $|u_0 - \alpha| \leq 1 - \frac{1}{e} \leq 1$.
De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
On a donc $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n$.
Il découle alors de la question précédente que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} |u_n - \alpha| \leq \frac{e-1}{2} \times \left(\frac{e-1}{2}\right)^n = \left(\frac{e-1}{2}\right)^{n+1}$$

De ce fait, la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- *Conclusion* : d’après le principe de récurrence, il en découle que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c’est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{e-1}{2}\right)^n}$$

(b) Comme $0 < \frac{e-1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e-1}{2}\right)^n = 0$.

On déduit alors du théorème des gendarmes que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha}$.