Exercice 1

1) • $A = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} \times \dfrac{8}{21} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{7\times 8}{3\times 3\times 7} = \dfrac{2\times 3}{3\times 3} - \dfrac{8}{3\times 3}$ donc $\boxed{A = -\dfrac{2}{9}}$

• $B = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3\times 5}{4\times 4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{4} - \dfrac{2}{4}$ soit $\boxed{B = \dfrac{3}{4}.}$

• $C = \dfrac{63}{40} \times \dfrac{8}{15} \times \dfrac{25}{42} = \dfrac{(3\times 3\times 7)\times 8\times (5\times 5)}{(8\times 5)\times (5\times 3)\times (2\times 3\times 7)}$ soit $\boxed{C = \dfrac{1}{2}.}$

2) • $D = \sqrt{12} + \sqrt{75} - 2\sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 2\times 4\sqrt{3}$ soit $\boxed{D = -\sqrt{3}.}$

• $E = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \times \dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \dfrac{3\times \sqrt{2}\times 2\times \sqrt{5}}{\sqrt{3}\times \sqrt{5}\times \sqrt{2}\times \sqrt{3}}$ soit $\boxed{E = 2.}$

• $F = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{2\left(3+\sqrt{5}\right)}{9-5}$ soit $\boxed{F = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$

Exercice 2

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 16 = (x+3)(x-3) &\iff x^2 + 10x + 16 = x^2 - 9 \\ &\iff 10x = -25 \\ &\iff x = -25/10 = -5/2 \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation proposée est } \mathscr{S} = \{-5/2\}.}$

(b) L'équation est définie lorsque $x(x+1)(x-1) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$, on a alors

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x(x+1)} = \frac{x-2}{x(x-1)} &\iff (x+2)\times x(x-1) = (x-2)\times x(x+1) \\ &\iff x\left[(x+2)(x-1) - (x-2)(x+1)\right] = 0 \\ &\iff x\left[x^2 + x - 2 - (x^2 - x - 2)\right] = 0 \\ &\iff 2x^2 = 0 \iff x = 0 \quad \text{(valeur interdite)} \end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \emptyset.}$

(c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a clairement

$$x^4 + 2x^2 + 3 \geqslant 3 > 0$$

si bien que $\boxed{\text{L'équation proposée n'a pas de solution.}}$

(d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $6x - 2x^2 + 8 = 0 \iff x^2 - 3x - 4 = 0$ (division par -2).
Le trinôme a pour discriminant $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = 5^2$.
Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux racines distinctes

$$x_1 = \frac{3-4}{2} = -1 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{3+5}{2} = 4$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \{-1; 4\}.}$

(e) Après division par 8, l'équation proposée équivaut à $x^2 + 7x + 9 = 0$.
Cette équation du second degré a pour discriminant

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 9 = 49 - 36 = 13$$

Comme $\Delta > 0$, elle admet deux solutions réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \left\{-\frac{7+\sqrt{13}}{2}; \frac{-7+\sqrt{13}}{2}\right\}.}$

(f) Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |8x - 1| = 3 &\iff 8x - 1 = 3 \quad \text{ou} \quad 8x - 1 = -3 \\ &\iff 8x = 4 \quad \text{ou} \quad 8x = -2 \\ &\iff x = 1/2 \quad \text{ou} \quad x = -1/4 \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'équation est } \mathscr{S} = \{-1/4; 1/2\}.}$

Exercice 3

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad 4 - 3x > 19 \iff -3x > 15 \iff x < -5$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathscr{S} = \,]-\infty\,; -5\,[.}$

(b) Le discriminant du trinôme du second degré $-x^2 + 10x - 16$ est

$$\Delta = 10^2 - 4 \times (-1) \times (-16) = 100 - 64 = 36 = 6^2$$

Comme $\Delta > 0$, il admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-10-6}{-2} = 8 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-10+6}{-2} = 2$$

Enfin, le trinôme est du signe de -1 (négatif) à l'extérieur de ses racines, donc

$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathscr{S} = \,]-\infty\,; 2\,] \cup [\,8\,; +\infty\,[.}$

(c) Dressons le tableau de signe de $P(x) = (2x+1)(x+3)(2-x)$:

x	$-\infty$		-3		$-1/2$		2		$+\infty$
$(x+3)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(2x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2-x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions est } \mathscr{S} =]-\infty\,;-3\,[\,\cup\,]-1/2\,;2\,[.}$

(d) Pour tout $x \neq 2$,

$$\frac{2x+1}{x-2} \geqslant 3 \iff \frac{2x+1}{x-2} \geqslant \frac{3x-6}{x-2}$$
$$\iff \frac{7-x}{x-2} \geqslant 0$$

Dressons alors un tableau de signe pour étudier le signe de $Q(x) = \dfrac{7-x}{x-2}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$.

x	$-\infty$		2		7		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$7-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$Q(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $\boxed{\mathscr{S} =]\,2\,;7\,].}$

(e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$x^4 - 6x^3 + 9x^2 = (x^2)^2 - 2 \times x^2 \times 3x + (3x)^2 = (x^2 - 3x)^2 \geqslant 0$$

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation proposée est } \mathscr{S} = \emptyset.}$

(f) Enfin

$$|3-2x| > |x-5| \iff (3-2x)^2 > (x-5)^2$$
$$\iff (3-2x-x+5)\,(3-2x+x-5) > 0$$
$$\iff (8-3x)\,(-x-2) > 0$$

Étudions sur $\mathbb{R}$ le signe de $P(x) = (8-3x)\,(-x-2)$:

x	$-\infty$		-2		$8/3$		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$8-3x$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de l'inéquation est } \mathscr{S} =]-\infty\,;-2\,[\,\cup\,]\,8/3\,;+\infty\,[.}$

Exercice 4

On simplifie les angles proposés pour les ramener dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$.

(a) On a directement $\boxed{\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}}$ par lecture du cercle trigonométrique.

(b) On a $\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{19\pi}{4}-4\pi\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ soit $\boxed{\cos\left(\frac{19\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(c) On a $\sin\left(\frac{-20\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{-20\pi}{3}+6\pi\right)=\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$ soit $\boxed{\sin\left(\frac{-20\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(d) On a $\cos(705\pi)=\cos(705\pi-702\pi)=\cos(\pi)$ soit $\boxed{\cos(705\pi)=-1}$

Exercice 5

(a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}&2\cos^2 x-\cos x=0\\ \iff\ &2\cos(x)\times\left(\cos(x)-\frac{1}{2}\right)=0\\ \iff\ &\cos(x)=0\quad\text{ou}\quad\cos(x)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Or
$$\begin{aligned}\cos(x)=0 &\iff \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &\iff x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad\text{ou}\quad x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

et
$$\begin{aligned}\cos(x)=\frac{1}{2} &\iff \cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad\text{ou}\quad x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad(k\in\mathbb{Z})\end{aligned}$$

En prenant $k=0$ dans chaque cas, on obtient les solutions dans l'intervalle proposé.

De ce fait, L'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$ de l'équation $2\cos^2 x-\cos x=0$ est $\mathscr{S}=\left\{-\frac{\pi}{2};-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right\}$.

(b) On sait (ou on lit) que $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

On voit sur le cercle trigonométrique que les solutions de notre inéquation correspondent aux abscisses curvilignes des points situés en-dessous des points d'abscisses curvilignes $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$ (ceux-ci sont exclus).

Attention toutefois, comme on demande les solutions dans $]-\pi\,;\pi\,]$, il faut « lire » les intervalles en partant de $-\pi$ pour aller jusqu'à π .

Ainsi, L'ensemble des solutions dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi\,]$ de l'inéquation $\sin(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ est $\mathscr{S}=\left]-\pi\,;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4}\,;\pi\right]$.