Exercice 1

1) Voici la table de vérité demandée :

P	Q	$P \implies Q$	$Q \implies P$	$(P \implies Q) \text{ OU } (Q \implies P)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

On en déduit que l'assertion proposée est toujours vraie ... et c'était prévisible.

En effet, « $(P \implies Q) \text{ OU } (Q \implies P)$ » équivaut à « $(\text{NON } P) \text{ OU } Q \text{ OU } (\text{NON } Q) \text{ OU } P$ », ce qui donne « $\text{NON } P \text{ OU } P \text{ OU } \text{NON } Q \text{ OU } Q$ » soit VRAI.

2) « $(P \implies Q) \text{ OU } Q$ » équivaut à « $(\text{NON } P) \text{ OU } Q \text{ OU } Q$ » soit « $\text{NON } P \text{ OU } Q$ ».

Ainsi, elle peut simplement s'écrire « $(P \implies Q)$ ».

Exercice 2

- 1) (a) NON (P ET NON Q)
 équivaut à $(\text{NON P}) \text{ OU } Q$
 équivaut à $P \implies Q$
- (b) $\text{NON (P} \implies (\text{P ET Q}))$ équivaut à $\text{NON (NON P OU (P ET Q))}$
 équivaut à $P \text{ ET (NON P OU NON Q)}$
 équivaut à $(P \text{ ET NON P}) \text{ OU } (P \text{ ET NON Q})$
 équivaut à $\text{FAUX OU (P ET NON Q)}$
 équivaut à $P \text{ ET NON Q}$
- (c) $\text{NON ((P} \implies Q) \text{ OU (Q} \implies P))$
 équivaut à $\text{NON (P} \implies Q) \text{ ET NON (Q} \implies P)$
 équivaut à $\text{NON (NON P OU Q) ET NON (NON Q OU P)}$
 équivaut à $P \text{ ET NON Q ET Q ET NON P}$
 équivaut à FAUX
- 2) (a) $P \text{ ET (P} \implies Q)$
 équivaut à $P \text{ ET (NON P OU Q)}$
 équivaut à $(P \text{ ET NON P}) \text{ OU } (P \text{ ET Q})$
 équivaut à FAUX OU (P ET Q)
 équivaut à $P \text{ ET Q}$
- (b) $(P \implies Q) \text{ OU } Q$
 équivaut à $\text{NON P OU } Q \text{ OU } Q$
 équivaut à $\text{NON P OU } Q$
 équivaut à $P \implies Q$
- (c) $(P \implies Q) \text{ ET (Q} \implies \text{NON P)}$
 équivaut à $(\text{NON P OU } Q) \text{ ET (NON Q OU NON P)}$
 équivaut à $\text{NON P OU (Q ET NON Q)}$
 équivaut à NON P OU FAUX
 équivaut à NON P

Il y avait deux propositions déjà vues dans l'exercice 1 ... désolé, je me suis un peu (beaucoup) raté en remaniant mes exercices !!!

Exercice 3

- (a) La fonction $f : x \mapsto \frac{x^2 - \cos(\pi x) + 3}{5 - |x|}$ est une composée de fonctions usuelles et définie en -2 .

De ce fait, $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = \frac{4 - \cos(-2\pi) + 3}{5 - 2} = \frac{6}{3}$ soit $\boxed{\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - \cos(\pi x) + 3}{5 - |x|} = 2.}$

- (b) On a $5 - x^3 + 7x \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -x^3$. Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 = +\infty$ par produit de limites.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - x^3 + 7x) = +\infty$.

Enfin, $\lim_{y \rightarrow +\infty} \sqrt{y} = +\infty$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{5 - x^3 + 7x} = +\infty}$ par composition de limites.

- (c) On a $3x^3 - 7 = o_{x \rightarrow -\infty}(x^4)$ d'où $(-5x^4 + 3x^3 - 7) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5x^4$.

Or, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4) = -\infty$ par produit de limites.

De ce fait, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^4 + 3x^3 - 7) = -\infty}$

- (d) On a $(-8x + 7 - 5x^2) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5x^2$ et $(3 + x^2) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^2$ donc $\frac{-8x + 7 - 5x^2}{3 + x^2} \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -5$.

Par conséquent, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8x + 7 - 5x^2}{3 + x^2} = -5.}$

- (e) Les numérateur et dénominateur sont des fonctions usuelles définies en 7.

On en déduit alors que $\lim_{x \rightarrow 7} (25 - 4x) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 7} (x - 7)^2 = 0^+$.

Il en découle que $\boxed{\lim_{x \rightarrow 7} \frac{25 - 4x}{(x - 7)^2} = -\infty}$ par quotient de limites.

- (f) Notons déjà que 5 est racine des polynômes $x^2 - 4x - 5$ et $x^2 - 7x + 10$. Les produits de leurs racines (-5 et 10 respectivement) permettent de déduire que les secondes racines sont -1 et 2 . De ce fait, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$x^2 - 4x - 5 = (x - 5)(x + 1) \quad \text{et} \quad x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$$

On en déduit que pour tout $x \neq 2$ et $x \neq 5$,

$$\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x - 5)(x + 1)}{(x - 5)(x - 2)} = \frac{x + 1}{x - 2}$$

Enfin, la fonction $h : x \mapsto \frac{x + 1}{x - 2}$ est une fonction usuelle définie en 5.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 1}{x - 2} = \frac{6}{3} = 2$ d'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 7x + 10} = 2}$

Exercice 4

(a) En $+\infty$, le quotient de polynômes $\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}$ a la même limite que $\frac{\pi x^2}{x^2} = \pi$.

De ce fait, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi x^2}{x^2 + 1} = \pi$.

La fonction cosinus étant continue en π , on a de plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}\right) = \cos(\pi) = -1$.

Enfin $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cos\left(\frac{\pi x^2}{x^2 + 1}\right) = -\infty$ par produit de limites.

(b) Pour tout réel $x \neq 0$, on a $\left|x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)\right| \leq |x|^3$ car $|\sin| \leq 1$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} |x|^3 = 0$ par produit de limites.

On déduit alors du théorème des Gendarmes que $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

(c) Pour $x > 2$, posons $h = x - 3$: alors $\lim_{x \rightarrow 3} h = 0$ et $\ln(x - 2) = \ln(1 + h)$.

Or $\ln(1 + h) \sim h$ donc $\ln(x - 2) \sim x - 3$ si bien que $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x - 2)}{x - 3} = 1$.

(d) Comme $1 = o(e^x)$ alors $e^x - 1 \sim e^x$ d'où $\frac{xe^x}{e^x - 1} \sim x$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = +\infty$.

(e) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et de plus $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ d'après les croissances comparées.

On en déduit par somme puis quotient de limites que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0$.

(f) On a $e^x - 1 \sim x$ donc $\frac{xe^x}{e^x - 1} \sim e^x$.

On déduit de la continuité de $\exp$ en 0 que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 1$.

Exercice 5

1) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $v : x \mapsto x^2 + x + 1$.

- Notons que $v(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, car son discriminant est $\Delta = 1 - 4 < 0$.

Par conséquent, L'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $v'(x) = 2x + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction $f = v^{-3}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = -3v'v^{-4}$, soit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{-6x - 3}{(x^2 + x + 1)^4}$$

- Enfin, $f'(x)$ est du signe de $-6x - 3 = -3(2x + 1)$ d'où le tableau de signe de f' :

x	$-\infty$	$-1/2$	$+\infty$
$2x + 1$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$

2) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $u : x \mapsto 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$.

- Cette fonction est bien évidemment définie sur $\mathbb{R}^*$. Par ailleurs, l'expression $g(x)$ est définie lorsque $u(x) > 0$; étudions alors le signe de u .

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$u(x)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi L'ensemble de définition de g est $\mathcal{D}_g =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$.

- De plus, u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$. De ce fait, $g : x \mapsto 2x \ln u(x)$ est une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_g$ et

$$g'(x) = 2 \ln u(x) + 2x \times \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) + 2x \times \left(\frac{-1}{x^2}\right) \times \frac{x}{x+1}$$

soit

$$\forall x \in \mathcal{D}_g \quad g'(x) = 2 \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} \right]$$

3) Les fonctions cos et sin sont définies sur $\mathbb{R}$ et $\sin \geq -1$ donc $2 + \sin > 0$, si bien que

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$.

Elle est enfin dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables, et

$$h'(x) = \frac{-\sin x \times (2 + \sin x) - \cos x \times \cos x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{-2 \sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(2 + \sin x)^2}$$

soit

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad h'(x) = -\frac{1 + 2 \sin x}{(2 + \sin x)^2}$$

4) Définissons tout d'abord la fonction auxiliaire $q : x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$.

- Elle est définie lorsque $1+x \neq 0$, soit $x \neq -1$.

De plus, l'expression $j(x)$ est définie lorsque $q(x) \geq 0$; étudions le signe de q .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$1+x$	$-$	0	$+$	$+$	
$q(x)$	$-$	$ $	$+$	0	$-$

Ainsi

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } j \text{ est } \mathcal{D}_j =]-1; 1].}$$

- La fonction usuelle q est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et

$$\forall x \neq -1, \quad q'(x) = \frac{(-1) \times (1+x) - (1-x) \times 1}{(1+x)^2} = \frac{-2}{(1+x)^2}$$

Par contre, la fonction racine carrée n'est dérivable que sur $]0; +\infty[$.

De ce fait, la fonction composée $j = \sqrt{q}$ est dérivable sur $] -1; 1[$ et $j' = \frac{q'}{2\sqrt{q}}$ soit

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad j'(x) = \frac{-2}{2(1+x)^2 q(x)} = \frac{-\sqrt{1+x}}{(1+x)^2 \sqrt{1-x}}}$$

- On voit clairement que $\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad j'(x) < 0}$

5) Considérons la fonction auxiliaire $w : x \mapsto x \ln x$.

- Elle est définie lorsque $x > 0$. Comme $k = e^w$, alors

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } k \text{ est } \mathcal{D}_k =]0; +\infty[.}$$

- De plus, w est dérivable sur $\mathcal{D}_k$ en tant que produit de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0 \quad w'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

De ce fait, la fonction composée $k = e^w$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $k' = w' e^w$, soit

$$\boxed{\forall x > 0 \quad k'(x) = (\ln x + 1) e^{x \ln x}}$$

- Comme $e^{x \ln x} > 0$, alors $k'(x)$ est du signe de $1 + \ln x$. Or, pour tout $x > 0$,

$$1 + \ln x > 0 \iff \ln x > -1 \iff x > 1/e$$

par croissance de la fonction exp. On en déduit le signe de k' :

x	0	$1/e$	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	0	$+$

6) L'expression $l(x)$ est définie lorsque $e^x - 1 \neq 0$ soit $x \neq 0$. Ainsi,

La fonction l est définie sur $\mathcal{D}_l = \mathbb{R}^*$.

Elle est dérivable sur $\mathcal{D}_l$ en tant que produit et quotient de fonctions dérivables, et

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad l'(x) = \frac{(x e^x + e^x) \times (e^x - 1) - x e^x \times e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - x e^x - e^x}{(e^x - 1)^2}$$

soit

$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad l'(x) = \frac{e^x (e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}$

Considérons maintenant la fonction $m : x \mapsto e^x - x - 1$ sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable en tant que somme de fonctions usuelles dérivables et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad m'(x) = e^x - 1$$

si bien que

$$m'(x) > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$$

Ceci permet de dresser le tableau de variations de m sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$m'(x)$	$-$	0	$+$
$m(x)$	$\searrow \quad 0 \quad \nearrow$		

On déduit de ce tableau de variations que $m(x) = e^x - x - 1 > 0$ pour tout $x \neq 0$.

Par conséquent,

$\forall x \neq 0 \quad l'(x) > 0$

7) La fonction l est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $]0; +\infty[$ (à cause de la racine carrée)

comme somme de fonctions dérivables et $l'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ pour tout $x > 0$.

8) Posons $u : x \mapsto x - 4$. La fonction $n = \sqrt{u}$ est définie lorsque $u \geq 0$, donc sur $[4; +\infty[$; elle est en outre dérivable (comme composée de fonctions dérivables) lorsque $u > 0$, soit sur $]4; +\infty[$, et l'on a

$$n'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} = 1 \times \frac{1}{2\sqrt{x-4}}$$

soit $n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} > 0$ pour tout $x > 4$.

9) La fonction $p = \cos \circ \cos$ est définie et dérivable (en tant que composée de fonctions dérivables) sur $\mathbb{R}$, et l'on a

$$p'(x) = \cos' x \times \cos'(\cos x) = (-\sin x) \times (-\sin(\cos x))$$

soit $p'(x) = \sin(x) \sin(\cos x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.