Exercice 1

Partie A

- 1) Cela signifie que tout élément de F possède **au plus un** antécédent par f dans E
ou encore que **la fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.**

Pour démontrer que f est injective, on procède de la manière suivante :

- ★ on considère deux éléments quelconques x_1 et $x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$;
- ★ on démontre alors que $x_1 = x_2$.

- 2) Cela signifie que tout élément de F possède **au moins un** antécédent par f dans E
ou encore que **la fonction f atteint toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée F .**

Pour démontrer que f est surjective, on procède de la manière suivante :

- ★ on considère un élément quelconque $y \in F$;
- ★ on prouve l'existence d'un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Partie B

- 1) Soit $y \in \mathbb{R}$. On a : $f(x) = y \iff 3x - 7 = y \iff x = \frac{y + 7}{3}$

Pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution x dans $\mathbb{R}$, donc

L'application f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) = 2|x| + 1 \geq 1$; en particulier, 0 n'a pas d'antécédent par g .

L'application g n'est pas surjective.

De plus, $g(-1) = 3 = g(1)$ ce qui montre que

L'application g n'est pas injective.

Exercice 2

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$: $g(1, n) = 1 \times n = n$ donc n admet $(1, n)$ pour antécédent par g .

Ceci montre que g est surjective.

- 2) On a $g(1, 2) = 2 = g(2, 1)$ donc g n'est pas injective.

- 3) Pour tout couple $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, on a

$$(p, q) \in g^{-1}(B) \iff g(p, q) \in B \iff pq = 12 \iff q = 12/p \text{ et } p \in \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$$

Ainsi

$$g^{-1}(B) = \{(1, 12); (2, 6); (3, 4); (4, 3); (6, 2); (12, 1)\}$$

Exercice 3

1) • Supposons que $A \cup B = A \cap C$.

★ Comme $B \subset (A \cup B)$, alors $B \subset (A \cap C)$; en particulier, $B \subset A$ puisque $A \cap C \subset A$.

★ De même, $A \subset (A \cup B)$ d'où $A \subset (A \cap C)$; ainsi, $A \subset C$ puisque $A \cap C \subset C$.

Ainsi, $B \subset A \subset C$: on a donc prouvé que $A \cup B = A \cap C \implies B \subset A \subset C$.

• Supposons que $B \subset A \subset C$.

★ Comme $B \subset A$, alors $A \cup B = A$.

★ Comme $A \subset C$, alors $A \cap C = A$.

Ainsi, $A \cup B = A \cap C$: on a donc prouvé que $B \subset A \subset C \implies A \cup B = A \cap C$.

Par double implication, $A \cap C = A \cup B \iff B \subset A \subset C$

2) • Supposons que $A \cup B \subset C$.

★ Comme $A \subset (A \cup B)$, alors $A \subset C$.

★ De même, $B \subset (A \cup B)$ d'où $B \subset C$.

Ainsi, $A \subset C$ et $B \subset C$: on a donc prouvé que $(A \cup B \subset C) \implies (A \subset C \text{ et } B \subset C)$.

• Supposons que $A \subset C$ et $B \subset C$.

Prenons alors un élément $x \in A \cup B$.

★ Ou bien $x \in A$, auquel cas $x \in C$.

★ Ou bien $x \in B$, auquel cas $x \in C$.

Ainsi, $x \in C$ pour tout $x \in A \cup B$, ce qui montre que $A \cup B \subset C$.

On a donc prouvé que $(A \subset C \text{ et } B \subset C) \implies A \cup B \subset C$.

Ainsi, $(A \cup B \subset C) \iff (A \subset C \text{ et } B \subset C)$

Exercice 4

1) On a $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} x^2$ et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$. De ce fait, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car c'est une fonction polynomiale) et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x - 5 = 2(x - 5/2)$$

donc $f'(x)$ est du signe de $(x - 5/2)$ sur $\mathbb{R}$.

En outre, $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} - 6 = -\frac{1}{4}$. On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$5/2$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
			+
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-1/4$
			$\nearrow$
			$+\infty$

2) (a) D'après le tableau de variations, $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{1}{4}; +\infty\right[.$

(b) Ajoutons les valeurs 2 et 3 au tableau. Comme $f(2) = f(3) = 0$, on a

x	$-\infty$	2	$5/2$	3	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘ 0	↘ $-1/4$	↗ 0	↗ $+\infty$

D'après ce nouveau tableau, $f([2; 3]) = \left[-\frac{1}{4}; 0\right].$

(c) Notons C l'ensemble recherché : $x \in C \iff -1 < f(x) < 0 \iff 2 < x < 3.$

Ainsi, $C =]2; 3[.$

Exercice 5

1) On a $|3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$. Ainsi, le module du complexe $3 + i$ vaut :

a. 4

b. $\sqrt{8}$

c. $\sqrt{10}$

2) Comme $z = 3 + i(4 - 5i) = 8 + 4i$, alors $|z| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$.

On peut donc affirmer que :

a. $\operatorname{Re}(z) = 3$

b. $|z| = 4\sqrt{5}$

c. $\bar{z} = 3 - i(4 - 5i)$

3) On a :
$$z_3 = \frac{-1 + i}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{(-1 + i)(1 - i\sqrt{3})}{4} = \frac{\sqrt{3} - 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{4}$$

Le quotient $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$ a donc pour forme algébrique :

a. $\frac{-1 + i}{-1 + i\sqrt{3}}$

b. $\frac{\sqrt{3} - 1}{4} + \frac{\sqrt{3} + 1}{4}i$

c. $\frac{\sqrt{3} + 1}{4} + \frac{\sqrt{3} - 1}{4}i$

4) On a :
$$-1 - i = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right)$$

Ainsi, $z = -1 - i$ s'écrit sous forme exponentielle :

a. $z = -\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

b. $z = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$

c. $z = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

5) On a :
$$z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{i} = -\sqrt{3} - i = 2 \left(\frac{-\sqrt{3} - i}{2} \right) = 2e^{-5i\pi/6}$$

donc $z^6 = 64e^{-i5\pi} = -64$. Autrement dit :

a. $z = \sqrt{3} - i$

b. $\arg(z) = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c. $z^6 = -64$

6) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ avec $(x; y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} 3z - \bar{z} = 2 - 8i &\iff 3(x + iy) - (x - iy) = 2 - 8i \\ &\iff 2x + 4iy = 2 - 8i \\ &\iff x = 1 \quad \text{et} \quad y = -2 \\ &\iff z = 1 - 2i \end{aligned}$$

L'équation $3z - \bar{z} = 2 - 8i$ admet donc pour solution :

a. $1 - 4i$

b. $1 - 2i$

c. 1

7) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$|z - i| = |\overline{z - i}| = |\bar{z} + i| = |i| \times |\bar{z} + i| = |i| |\bar{z} + i| = |i\bar{z} - 1|$$

Ainsi $|z - i|$ est égal à :

a. $|z| + 1$

b. $|z| - 1$

c. $|i\bar{z} - 1|$

8) Soit z un nombre complexe non nul d'argument θ . Il vient

$$\arg\left(\frac{-\sqrt{3} + i}{z}\right) = \arg(-\sqrt{3} + i) - \arg z = \frac{5\pi}{6} - \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Un argument de $\frac{-\sqrt{3} + i}{z}$ est alors :

a. $-\frac{\pi}{6} - \theta$

b. $-\frac{5\pi}{6} + \theta$

c. $\frac{5\pi}{6} - \theta$

9) Pour tout $z \neq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{z-2}{z-1} = z &\iff z-2 = z^2 - z \\ &\iff z^2 - 2z + 2 = 0 \\ &\iff (z-1)^2 + 1 = 0 \\ &\iff (z-1+i)(z-1-i) = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\frac{z-2}{z-1} = z$ est donc :

a. $\{1 - i\}$

b. L'ensemble vide

c. $\{1 - i; 1 + i\}$

10) Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = -2 \iff e^x e^{iy} = 2e^{i\pi} \iff x = \ln(2) \quad \text{et} \quad y = \pi + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

Ainsi, l'équation $e^z = -2$ admet sur $\mathbb{C}$

a. une unique solution

b. aucune solution

c. une infinité de solutions

Exercice 6

1) On a
$$z^2 = \left(-\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= 2 + \sqrt{2} - (2 - \sqrt{2}) - 2i\sqrt{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$

$$= 2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$$

soit
$$z^2 = 2\sqrt{2}(1-i).$$

2) Notons que
$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$$

si bien que
$$z^2 = 4e^{-i\pi/4}.$$

3) Posons $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Alors
$$z^2 = r^2 e^{i2\theta} = 4e^{-i\pi/4}$$

d'où
$$r^2 = 4 \quad \text{et} \quad 2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

soit
$$r = 2 \quad \text{et} \quad \theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ainsi, $\theta = -\frac{\pi}{8}$ ou $\frac{7\pi}{8} + 2k\pi$. Comme $\text{Im}(z) > 0$, on a nécessairement $\theta = \frac{7\pi}{8} + 2k\pi$.

En conséquence,
$$z = 2e^{i7\pi/8}$$

4) Comme
$$z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}} = 2e^{i7\pi/8} = 2\left[\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)\right]$$

alors
$$\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

L'angle $7\pi/8$ étant dans l'intervalle $[\pi/2; \pi]$, son cosinus est bien négatif et son sinus est bien positif. Vérifions enfin que la somme de leurs carrés vaut 1 :

$$\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = \frac{2+\sqrt{2}}{4} + \frac{2-\sqrt{2}}{4} = 1$$

Tout va bien, les résultats obtenus sont cohérents !!!

Exercice 7

1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} & (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) \\ &= z^4 + 4z^3 + 20z^2 - 4z^3 - 16z^2 - 80z + 13z^2 + 52z + 260 \\ &= z^4 + 17z^2 - 28z + 260 \\ &= P(z) \end{aligned}$$

De ce fait

$$P(z) = (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}$$

2) D'après la question précédente, on a pour $z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} P(z) = 0 &\iff (z^2 - 4z + 13)(z^2 + 4z + 20) = 0 \\ &\iff z^2 - 4z + 13 = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + 4z + 20 = 0 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} z^2 - 4z + 13 &= [z^2 - 4z + 4] + 9 \\ &= (z - 2)^2 - (3i)^2 \\ &= (z - 2 - 3i)(z - 2 + 3i) \end{aligned}$$

si bien que $z^2 - 4z + 13 = 0 \iff z = 2 + 3i \quad \text{ou} \quad z = 2 - 3i$

On peut aussi calculant le discriminant : comme $\Delta = 16 - 52 = -36 = (6i)^2$, on choisit $\delta = 6i$ et l'on retrouve les racines $2 + 3i$ et $2 - 3i$.

De même

$$\begin{aligned} z^2 + 4z + 20 &= [z^2 + 4z + 4] + 16 \\ &= (z + 2)^2 - (4i)^2 \\ &= (z + 2 - 4i)(z + 2 + 4i) \end{aligned}$$

si bien que $z^2 + 4z + 20 = 0 \iff z = -2 + 4i \quad \text{ou} \quad z = -2 - 4i$

On peut aussi calculant le discriminant : comme $\Delta = 16 - 80 = -64 = (8i)^2$, on choisit $\delta = 8i$ et l'on retrouve les racines $-2 + 4i$ et $-2 - 4i$.

$$\text{L'ensemble des solutions complexes de l'équation } P(z) = 0 \text{ est donc } \mathcal{S} = \{-2 - 4i; -2 + 4i; 2 - 3i; 2 + 3i\}.$$

Exercice 8

Nos trois fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0.

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(-x) = \frac{\cos(-3x) + 2}{(-x)^2 + 1} = \frac{\cos(3x) + 2}{x^2 + 1} = f(x)$ donc f est paire.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(-x) = (-x)^3 \sin(-x) = x^3 \sin(x) = g(x)$ donc g est paire.

3) On observe que les nombres $h(1) = -3$ et $h(-1) = -11$ ne sont ni égaux ni opposés.

De ce fait, h n'est ni paire ni impaire.

Exercice 9

- 1) (a) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.
- (b) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.
- 2) (a) $\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$ et $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$.
- (b) On retrouve ces formules en écrivant la relation $e^{i(a-b)} = e^{ia} \times e^{-ib}$:
- $$\begin{aligned} \cos(a - b) + i \sin(a - b) &= [\cos(a) + i \sin(a)] [\cos(b) - i \sin(b)] \\ &= [\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)] + i [\sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)] \end{aligned}$$
- puis en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres.
- 3) (a) On factorise par $e^{i(p+q)/2}$, ce qui conduit grâce aux formules d'Euler à
- $$e^{ip} + e^{iq} = e^{i(p+q)/2} (e^{i(p-q)/2} + e^{-i(p-q)/2}) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i(p+q)/2}$$
- (b) Alors $\cos(p) + \cos(q) = \operatorname{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$
- et $\sin(p) + \sin(q) = \operatorname{Im}(e^{ip} + e^{iq}) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Exercice 10

- 1) La fonction $f_1 : x \mapsto \cos x$ est décroissante sur $[0; \pi]$.
- De plus, la fonction affine $f_2 : y \mapsto 1 - y$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- De ce fait, leur composée $f_3 = f_2 \circ f_1$ est croissante sur $[0; \pi]$.
- En outre, $f_3(x) = 1 - \cos x \geq 0$ pour tout $x \in [0; \pi]$.
- Enfin, la fonction $f_4 : z \mapsto \sqrt{z}$ est croissante sur $[0; +\infty[$.
- Par conséquent, leur composée $f = f_4 \circ f_3$ est croissante sur $[0; \pi]$.
- Son minimum est ainsi $f(0) = \sqrt{1-1} = 0$ et son maximum $f(\pi) = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}$
- 2) En utilisant les règles de calculs sur les dérivées, on obtient facilement :

$$\forall x \in]0; \pi[\quad f'(x) = \frac{+\sin x}{2\sqrt{1-\cos x}} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $[0; \pi]$. Voici son tableau de variations :

x	0	π
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0	$\nearrow \sqrt{2}$