Exercice 1

1) Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x+1 \neq 0$ et que $\dfrac{x-1}{x+1} > 0$ à cause du logarithme.

   Un tableau de signe montre que $\dfrac{x-1}{x+1} > 0 \iff x \in \,]-\infty\,;-1\,[\, \cup \,]\,1\,;+\infty\,[$.

   Ainsi, $\boxed{\mathscr{D}_f = \,]-\infty\,;-1\,[\, \cup \,]\,1\,;+\infty\,[.}$

2) Déjà,l'ensemble $\mathscr{D}_f$ est symétrique par rapport à 0. De plus, on a pour $|h| > 1$

$$\begin{aligned} f(0+h)+f(0-h) &= \frac{h}{2}+2+\ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right)-\frac{h}{2}+2+\ln\left(\frac{-h-1}{-h+1}\right) \\ &= 4+\ln\left(\frac{h-1}{h+1}\right)+\ln\left(\frac{h+1}{1-h}\right) \\ &= 2\times 2 \end{aligned}$$

   donc $\boxed{\text{Le point } \Omega(0;2) \text{ est un centre de symétrie de } \mathscr{C}_f.}$

3) (a)
   - Comme $1 = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x)$, alors $\dfrac{x-1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1$.

     Par continuité de ln, il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$.

     On en déduit enfin par quotient et sommes de limites que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.}$
   - Par symétrie, il en découle que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.}$
   - On a $\displaystyle\lim_{x\to1} \frac{x-1}{x+1} = 0$ d'où $\displaystyle\lim_{x\to1} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\infty$ par composition de limites.

     On en déduit par quotient et sommes de limites que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to1} f(x) = -\infty.}$
   - Par symétrie, il en découle que $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to-1} f(x) = +\infty.}$

   (b) Ainsi, $\mathscr{C}_f$ admet pour asymptotes les droites $\boxed{\Delta_1 \,:\, x = 1}$ et $\boxed{\Delta_2 \,:\, x = -1.}$

   De plus, on a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$. De même, on a $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 0$

   si bien que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-\left(\frac{x}{2}+2\right)\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[f(x)-\left(\frac{x}{2}+2\right)\right] = 0$

   et donc $\boxed{\text{La droite } \Delta_3 \,:\, y = \dfrac{x}{2}+2 \text{ est asymptote à } \mathscr{C}_f \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty.}$

   (c) Cette position dépend du signe de $f(x)-\left(\dfrac{x}{2}+2\right) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. Or, pour $x \in \mathscr{D}_f$,

$$\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0 \iff \frac{x-1}{x+1} > 1 \iff \frac{x-1}{x+1}-1 > 0 \iff \frac{-2}{x+1} > 0 \iff x+1 < 0$$

   donc $\boxed{\begin{array}{l}\text{La courbe } \mathscr{C}_f \text{ est située au-dessus de la droite } \Delta_3 \\ \text{sur }]-\infty\,;-1\,[\text{ et en-dessous sur }]\,1\,;+\infty\,[.\end{array}}$

4) La fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$ en tant que composée de fonctions usuelles dérivables sur leurs ensembles de définitions respectifs. Soyons malins :

Pour tout $x \in \mathscr{D}_f$ $\quad f(x) = \dfrac{x}{2} + 2 + \ln|x-1| - \ln|x+1|$ (astuce diabolique !)

donc
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{x+1-(x-1)}{x^2-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{x^2-1} \end{aligned}$$

Comme $x^2 - 1 > 0$ sur l'ensemble $\mathscr{D}_f$, il en découle que $f' > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur chacun des intervalles $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$	
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$	$-\infty \nearrow$	$+\infty$

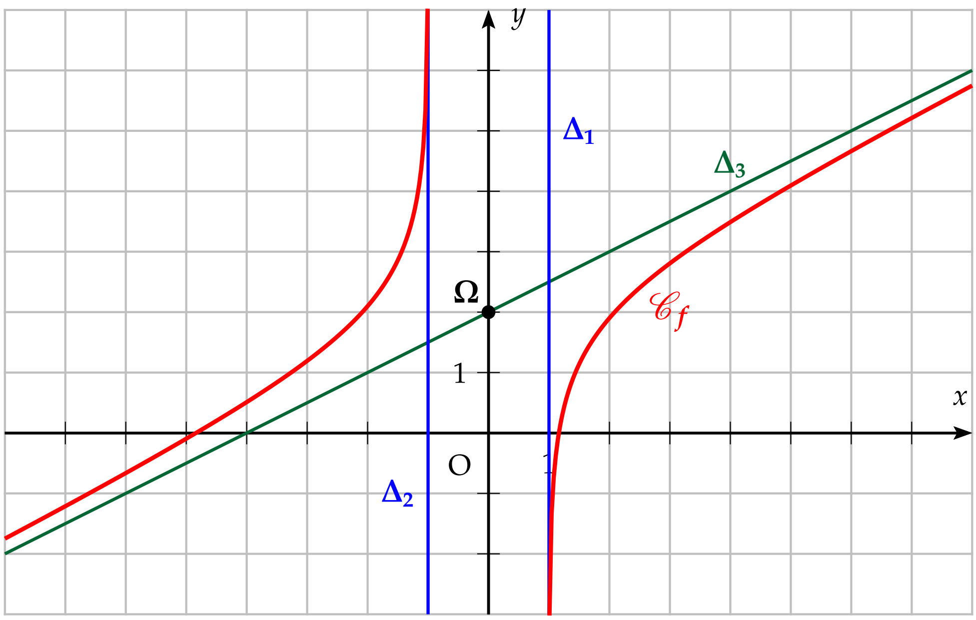
5) Appliquons le théorème de la bijection continue à la fonction f sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

- La fonction est dérivable sur $\mathscr{D}_f$, donc continue sur $]1\,;+\infty[$.
- La fonction f est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.

De ce fait, f est une bijection de $]1\,;+\infty[$ sur $f(]1\,;+\infty[) = \mathbb{R}$ (cf. tableau de variations). En particulier, 0 admet un unique antécédent par f :

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha \in\,]1\,;+\infty[\text{ tel que } f(\alpha) = 0.}$$

6) Et voici un très joli dessin.



Exercice 2

Dans chaque cas, on va faire apparaître une somme de Riemann sur $[\,0\,;1\,]$ et utiliser le fait que, si la fonction f est continue sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$, alors

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t}$$

1) Définissons la fonction $f : t \longmapsto t^2$ sur $[\,0\,;1\,]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a alors

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$. Cette fonction étant continue car polynomiale, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Autrement dit, $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}}$$

2) Posons $g : t \longmapsto \sin(\pi\, x)$ sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a alors

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction g sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$. De plus, la fonction g est continue en tant que composée de fonctions usuelles continues sur $\mathbb{R}$, si bien que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel

$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sin(\pi\, t)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

Ainsi, $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{2}{\pi}}$$

3) Définissons la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ sur $[\,0\,;1\,]$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a alors

$$w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+k^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)$$

C'est bien une somme de Riemann associée à la fonction h sur l'intervalle $[\,0\,;1\,]$. Comme h est continue en tant que quotient de polynômes, la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ainsi vers le réel

$$\int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Par conséquent, $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3

1) IPP : comme $\left[\dfrac{u^3}{3}\ \ln(u)\right]' = u^2\ \ln(u) + \dfrac{u^3}{3} \times \dfrac{1}{u} = u^2\ \ln(u) + \dfrac{u^2}{3}$

alors $\left[\dfrac{u^3}{3}\ \ln(u)\right]_1^3 = \displaystyle\int_1^3 u^2\ \ln(u)\ \mathrm{d}u + \int_1^3 \dfrac{u^2\ \mathrm{d}u}{3}$

donc $\boxed{\displaystyle\int_1^3 u^2\ \ln(u)\ \mathrm{d}u = \left[\dfrac{u^3}{3}\ \ln(u)\right]_1^3 - \left[\dfrac{u^3}{9}\right]_1^3 = 9\ln(3) - \dfrac{26}{9}}$

2) CDV : posons $u = \sin t$ sur l'intervalle $\left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Alors $\mathrm{d}u = \cos(t)\ \mathrm{d}t$

d'où $\boxed{\displaystyle\int_{t=0}^{t=\pi/2} \dfrac{\cos(t)\ \mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)} = \int_{u=0}^{u=1} \dfrac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \left[\arctan u\right]_0^1 = \dfrac{\pi}{4}}$

3) Le nombre $f(u) = \dfrac{u+3}{u^2-1} = \dfrac{u+3}{(u-1)\,(u+1)}$ peut s'écrire $g(u) = \dfrac{a}{u-1} + \dfrac{b}{u+1}$ avec a et $b \in \mathbb{R}$.

En effet, $\forall\, u \geqslant 2 \qquad g(u) = \dfrac{a(u+1)+b(u-1)}{u^2-1} = \dfrac{(a+b)u + (a-b)}{u^2-1}$

donc $f = g \iff \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2a=4 \\ 2b=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$

Ainsi, $\forall\, u \geqslant 2 \qquad \dfrac{u+3}{u^2-1} = \dfrac{2}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}$

d'où
$$\begin{aligned}\int_2^4 \frac{u+3}{u^2-1}\ \mathrm{d}u &= 2\int_2^4 \frac{\mathrm{d}u}{u-1} - \int_2^4 \frac{\mathrm{d}u}{u+1}\\ &= 2\Big[\ln(u-1)\Big]_2^4 - \Big[\ln(u+1)\Big]_2^4\\ &= 2\,(\ln 3 - \ln 1) - (\ln 5 - \ln 3)\end{aligned}$$

soit $\boxed{\displaystyle\int_2^4 \dfrac{u+3}{u^2-1}\ \mathrm{d}u = 3\ln 3 - \ln 5 = \ln\left(\dfrac{27}{5}\right)}$

4) CDV : posons $u = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[\,1\,;9\,]$. Alors $x = u^2$ et $\mathrm{d}x = 2u\ \mathrm{d}u$

d'où $\displaystyle\int_{x=1}^{x=9} x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_{u=1}^{u=3} u^2 \times \mathrm{e}^{u} \times 2u\ \mathrm{d}u = \int_1^3 2u^3\,\mathrm{e}^{u}\ \mathrm{d}u$

Cherchons une primitive de $f(u) = 2u^3\,\mathrm{e}^{u}$ sous la forme

$$\mathrm{F}(u) = \left(au^3 + bu^2 + cu + d\right)\,\mathrm{e}^{u}$$

Alors
$$\begin{aligned}\mathrm{F}'(u) &= \left(3au^2 + 2bu + c\right)\,\mathrm{e}^{u} + \left(au^3 + bu^2 + cu + d\right)\,\mathrm{e}^{u}\\ &= \left(au^3 + (b+3a)u^2 + (c+2b)u + (d+c)\right)\,\mathrm{e}^{u}\end{aligned}$$

donc $\mathrm{F}' = f \iff \begin{cases} a=2 \\ b+3a=0 \\ c+2b=0 \\ d+c=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=2 \\ b=-3a=-6 \\ c=-2b=12 \\ d=-c=-12 \end{cases}$

On prendra ainsi $F(u) = \left(2u^3 - 6u^2 + 12u - 12\right) e^{u}$, de sorte que

$$\int_1^3 2u^3 e^{u} \, du = \left[\left(2u^3 - 6u^2 + 12u - 12\right) e^{u}\right]_1^3 = 24e^3 + 4e$$

soit
$$\boxed{\int_1^9 x\, e^{\sqrt{x}} \, dx = 24e^3 + 4e}$$

Exercice 4

Pour chacun des problèmes de Cauchy, j'appelle **(E)** l'équation différentielle associée.

(a)
- L'équation homogène $y' + 2y = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y_C : x \longmapsto C\, e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{C}$.
- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = (ax + b)\, e^x$. On a alors
$$y_P'(x) + 2\, y_P(x) = (ax + b)\, e^x + a\, e^x + 2(ax + b)\, e^x = (3ax + 3b + a)\, e^x$$
De ce fait, y_P est solution de **(E)** si, et seulement si, $\begin{cases} 3a = 1 \\ a + 3b = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1/3 \\ b = -1/9 \end{cases}$.
Ainsi $y_P : x \longmapsto \left(\dfrac{x}{3} - \dfrac{1}{9}\right) e^x$ est une solution de l'équation **(E)**.
- On en déduit que les solutions de l'équation **(E)** sont toutes les fonctions
$$\boxed{f_C : x \longmapsto C\, e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^x \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}}$$
- Pour une telle fonction, on a $f_C(1) = 2 \iff Ce^{-2} + \dfrac{2}{9} e = 2 \iff C = 2e^2 - \dfrac{2}{9} e^3$.
En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction
$$\boxed{f : x \longmapsto \left(2e^2 - \frac{2}{9} e^3\right) e^{-2x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\right) e^x}$$

(b)
- L'équation homogène $y - y' = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $y_C : x \longmapsto C\, e^x$ avec $C \in \mathbb{C}$.
- Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = C(x)\, e^x$. On a alors
$$y_P(x) - y_P'(x) = C(x)\, e^x - (C'(x)\, e^x + C(x)\, e^x) = -C'(x)\, e^x$$
De ce fait, y_P est solution de **(E)** si, et seulement si, $-C'(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
Ceci équivaut à $C(x) = -\arctan(x) + C^{te}$ ... et l'on peut prendre la constante égale à 0.
Ainsi $y_P : x \longmapsto -\arctan(x)\, e^x$ est une solution de l'équation **(E)**.
- On en déduit que les solutions de l'équation **(E)** sont toutes les fonctions
$$\boxed{f_C : x \longmapsto C\, e^x - \arctan(x)\, e^x \quad \text{avec } C \in \mathbb{C}}$$
- Pour une telle fonction, on a $f_C(0) = 1 \iff C - 0 = 1 \iff C = 1$.
En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction
$$\boxed{f : x \longmapsto e^x - \arctan(x)\, e^x}$$

(c) • L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$.

Or $$r^2 + r - 2 = 0 \iff (r+2)(r-1) = 0 \iff r = -2 \quad \text{ou} \quad r = 1$$

De ce fait, les solutions de l'équation homogène $y'' + y' - 2y = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $g : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \mu\,\mathrm{e}^{x}$, avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

• Recherchons une solution particulière sous la forme $f_0 : x \longmapsto ax + b$.

Alors $$f_0{}'(x) = a \qquad \text{et} \qquad f_0{}''(x) = 0$$

donc $$f_0{}''(x) + f_0{}'(x) - 2f_0(x) = -2ax + (a - 2b)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. De ce fait, la fonction f_0 est solution de **(E)** si, et seulement si,

$$\begin{cases} -2a = 16 \\ a - 2b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -8 \\ b = a/2 = -4 \end{cases}$$

Ainsi, la fonction $f_0 : x \longmapsto -8x - 4$ est une solution de l'équation **(E)**.

• On en déduit que les solutions de l'équation **(E)** sont toutes les fonctions

$$\boxed{f : x \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{-2x} + \mu\,\mathrm{e}^{x} - 8x - 4\text{, avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.}$$

• Pour une telle fonction, on a $f'(x) = -2\lambda\mathrm{e}^{-2x} + \mu\mathrm{e}^{x} - 8$ donc

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu - 4 = 0 \\ -2\lambda + \mu - 8 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \mu = 4 \\ -2\lambda + \mu = 4 \end{cases}$$

En retranchant la seconde équation à la première, on obtient $3\lambda = 0$ soit $\lambda = 0$ d'où $\mu = 4$.

En conséquence, la solution de notre problème de Cauchy est la fonction

$$\boxed{f : x \longmapsto 4\,\mathrm{e}^{x} - 8x - 4}$$

Exercice 5

1) La fonction g est dérivable et ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, donc la fonction $f = \dfrac{1}{g}$ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f' = -\frac{g'}{g^2} = -\frac{1}{g^2} \times \frac{1}{20}\,g(10 - g) = -\frac{10 - g}{20g} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{g} + \frac{1}{20}$$

soit $f' = -\dfrac{f}{2} + \dfrac{1}{20}$, ce qui montre que $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est solution de l'équation } \textbf{(F)}.}$

2) Résolvons l'équation **(F)** : $z' + z/2 = 1/20$.

• L'équation homogène $z' + z/2 = 0$ admet pour solutions toutes les fonctions de la forme $z_C : x \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-t/2}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

• Cherchons une solution particulière sous la forme $z_P(x) = K$. On a alors

$$z_P{}'(x) + z_P(x)/2 = 0 + K/2 = K/2$$

De ce fait, z_P est solution de **(F)** si, et seulement si, $K/2 = 1/20$ soit $K = 1/10$.
Ainsi $z_P : x \longmapsto 1/10$ est une solution de l'équation **(F)**.

• On en déduit que les solutions de l'équation **(F)** sont toutes les fonctions

$$\boxed{z : t \longmapsto C\,\mathrm{e}^{-t/2} + \frac{1}{10} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{C} \text{ une constante}}$$

3) La fonction f est une solution de **(F)**, donc de la forme ci-dessus.

En outre, $f(0) = \dfrac{1}{g(0)} = 1 = C + \dfrac{1}{10}$ soit $C = \dfrac{9}{10}$ d'où $\boxed{f : t \longmapsto \dfrac{9\,e^{-t/2} + 1}{10}}\cdot$

Comme $g = \dfrac{1}{f}$, il en découle que $\boxed{g : t \longmapsto \dfrac{10}{9\,e^{-t/2} + 1}}\cdot$