Devoir Surveillé n°4 de Mathématiques

Samedi 20 Janvier 2024 *(Durée : **3 heures**)*

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{2} + 2 + \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ et l'on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}\right)$ du plan.

1) Déterminer l'ensemble de définition de cette fonction.
2) Prouver que le point $\Omega(0;2)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
3) (a) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
   (b) En déduire l'existence de trois droites asymptotes à la courbe $\mathscr{C}_f$.
   (c) Préciser la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'asymptote oblique.
4) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
5) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $]\,1\,;+\infty\,[$.
6) D'un geste élégant et décontracté, esquisser l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exercice 2

Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} \qquad v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_1^3 u^2\,\ln(u)\,\mathrm{d}u$ (b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)}$ (c) $\displaystyle\int_2^4 \frac{u+3}{u^2-1}\,\mathrm{d}u$ (d) $\displaystyle\int_1^9 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 4

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

(a) $\begin{cases} y' + 2y = x\,\mathrm{e}^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} y - y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} y'' + y' - 2y = 16\,x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -4 \end{cases}$

Exercice 5

La fonction g est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle **(E)** : $y' = \dfrac{1}{20}\,y(10-y)$.
On suppose en outre que $g(0) = 1$ et que g ne s'annule jamais.

1) Montrer que la fonction $f = \dfrac{1}{g}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation **(F)** : $z' = -\dfrac{z}{2} + \dfrac{1}{20}$.
2) Résoudre l'équation **(F)** sur $\mathbb{R}$.
3) Déterminer l'expression de f puis celle de g.