Exercice 1

(a) Effectuons le changement de variable $u = \sqrt{x}$: alors $x = u^2$ et $dx = 2u du$.

De ce fait,
$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{2u du}{u^2 + u} = 2 \int \frac{du}{u + 1} = 2 \ln|u + 1|$$

soit

$$\boxed{\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = 2 \ln(1 + \sqrt{x})}$$

(b) Effectuons le changement de variables $u = \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Alors $du = -\sin x dx$ et $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = u^2 - 1$

d'où
$$\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{(-\sin^2 x)(-\sin x dx)}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du$$

Par division euclidienne, $u^2 - 1 = u^2 + 1 - 2$

si bien que
$$\int \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} du = \int \left(1 - \frac{2}{u^2 + 1}\right) du = u - 2 \arctan u$$

d'où

$$\boxed{\int \frac{\sin^3 x dx}{1 + \cos^2 x} = \cos x - 2 \arctan(\cos x)}$$

(c) Et une intégration par parties pour la route :

Notons
$$\left. \begin{array}{l} f'(\ell) = 1 \\ g(\ell) = \ln(1 + \ell) \end{array} \right\} \text{ et } \left. \begin{array}{l} f(\ell) = 1 + \ell \\ g'(\ell) = \frac{1}{1 + \ell} \end{array} \right\}$$

Alors
$$\int_0^1 \ln(1 + \ell) d\ell = \left[(1 + \ell) \ln(1 + \ell) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{(1 + \ell) d\ell}{1 + \ell} = 2 \ln(2) - \int_0^1 1 d\ell$$

soit

$$\boxed{\int_0^1 \ln(1 + \ell) d\ell = 2 \ln(2) - 1}$$

Exercice 2

1) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $f_n : x \mapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0; 1]$ car c'est un quotient de fonctions usuelles continues. De ce fait, I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Le premier terme de cette suite se calcule tout simplement :

$$\boxed{I_0 = \int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}}$$

2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(x^{n+1} e^{-x})' = (n+1)x^n e^{-x} - x^{n+1} e^{-x}$ pour tout $x \in [0; 1]$

donc
$$\left[x^{n+1} e^{-x} \right]_0^1 = (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \quad \text{par intégration}$$

soit
$$e^{-1} - 0 = (n+1) I_n - I_{n+1}$$

d'où

$$\boxed{I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1) I_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

$$(b) \text{ Alors } I_1 = -\frac{1}{e} + I_0 = -\frac{1}{e} + 1 - \frac{1}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

$$\text{et } I_2 = -\frac{1}{e} + 2I_1 = -\frac{1}{e} + 2 - \frac{4}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_2 = 2 - \frac{5}{e}}$$

$$\text{puis } I_3 = -\frac{1}{e} + 3I_2 = -\frac{1}{e} + 6 - \frac{15}{e} \quad \text{soit} \quad \boxed{I_3 = 6 - \frac{16}{e}}$$

3) Trop facile : par linéarité de l'intégrale, il vient

$$I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} dx = -\int_0^1 x^3 e^{-x} dx + 2\int_0^1 x^2 e^{-x} dx - \int_0^1 x e^{-x} dx$$

$$\text{soit} \quad \boxed{I = -I_3 + 2I_2 - I_1 = -3 + \frac{8}{e}}$$

4) (a) Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$, on a $0 < e^{-x} \leq e^0 = 1$ donc $0 \leq f_n(x) \leq x^n$ puisque $x^n \geq 0$.

$$\text{En intégrant, on en déduit que } \boxed{0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

$$(b) \text{ Bien entendu, on calcule facilement } \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

De plus, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ par quotient de limites

On déduit alors du Théorème des Gendarmes que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.}$

Exercice 3

1) Soit f une solution de (E) sur $]0; +\infty[$. Comme $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$, on a pour tout $x > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) - 2g(x) &= \frac{x f'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{2f(x)}{x} = \frac{x f'(x) - f(x) - 2x f(x)}{x^2} \\ &= \frac{x f'(x) - (2x + 1) f(x)}{x^2} = \frac{8x^2}{x^2} = 8 \end{aligned}$$

si bien que $\boxed{g \text{ est une solution de (F) sur }]0; +\infty[.}$

2) Soit h une solution de (F) sur $]0; +\infty[$. Comme $f : x \mapsto x h(x)$, on a pour tout $x > 0$

$$f'(x) = x h'(x) + h(x) = x(2h(x) + 8) + h(x) = (2x + 1)h(x) + 8x$$

$$\text{d'où } x f'(x) - (2x + 1) f(x) = x(2x + 1)h(x) + 8x^2 - (2x + 1)x h(x) = 8x^2$$

Ainsi $\boxed{f \text{ est une solution de (E) sur }]0; +\infty[.}$

3) L'équation homogène $y' - 2y = 0$ a pour solutions les fonctions $y_C : x \mapsto C e^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{C}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_P(x) = K = C^{\text{te}}$. Alors $y_P'(x) - 2y_P(x) = -2K$ donc y_P solution si, et seulement si, $K = -4$. Autrement dit, $y_P : x \mapsto -4$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Les solutions de l'équation (F) sont les fonctions } g_C : x \mapsto C e^{2x} - 4 \text{ avec } C \in \mathbb{C}.}$$

Or, d'après les questions 1) et 2), une fonction f est solution de **(E)** si, et seulement si, la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est solution de **(F)**. De ce fait, les solutions de **(E)** sont les produits des solutions de **(F)** par la fonction $x \mapsto x$. En conséquence,

Les solutions de **(E)** sont les fonctions $f_C : x \mapsto Cx e^{2x} - 4x$ avec $C \in \mathbb{C}$.

Exercice 4

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n) : \ll 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2 \gg$.

- *Initialisation* : pour $n = 1$, la somme considérée ci-dessus vaut 1 ; par ailleurs, $1^2 = 1$. Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie ; montrons alors que la proposition $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

D'après $\mathcal{P}(k)$, on a $1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1) = k^2$

d'où $[1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1)] + (2k + 1) = k^2 + 2k + 1$

soit $1 + 3 + 5 + \dots + (2k + 1) = (k + 1)^2$

ce qui signifie que la proposition $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

- *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire que

$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} + \frac{a_n + 2b_n}{4} = \frac{3(a_n + b_n)}{4} = \frac{3}{4} \times u_n$

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

En outre $u_0 = a_0 + b_0 = 80$ donc $u_n = 80 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} - \frac{2a_n + b_n}{4} = \frac{b_n - a_n}{4} = \frac{1}{4} \times v_n$

Ainsi la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

En outre $v_0 = b_0 - a_0 = 40$ donc $v_n = 40 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = b_n - a_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n = \frac{u_n - v_n}{2} \\ b_n = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

si bien que $a_n = 40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n - 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ et $b_n = 40 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 20 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

Exercice 6

1) (a) D'après le merveilleux cours de maths, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

On a tout d'abord $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

La première relation prouve que la première colonne et la diagonale ne contiennent que des 1. La seconde permet de remplir la deuxième colonne et la parallèle à la diagonale.

Ensuite $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) et $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$ (relation de Pascal).

(b) On place les deux premières colonnes et la diagonale, puis on complète le triangle à l'aide de la relation de Pascal :

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

2) (a) Pour tous les complexes a et b , on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

(b) Avec $n = 6$, $a = 1$ et $b = -x$, on obtient

$$(1-x)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1.$$

Exercice 7

1) (a) **Procédure 1**

On choisit 5 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 3 jetons parmi ces 5. Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{5} \times \binom{5}{3} = \frac{9!}{5!4!} \times \frac{5!}{3!2!} = \frac{9!}{4!3!2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{6 \times 2} = 9 \times 7 \times 5 \times 4 = 1260$$

Procédure 2

On choisit 5 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 2 jetons parmi ces 5. Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{5} \times \binom{5}{2} = \binom{9}{5} \times \binom{5}{3} = 1260 \quad \text{puisque} \quad \binom{5}{2} = \binom{5}{5-2} = \binom{5}{3}$$

Procédure 3

On choisit 3 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, puis 2 jetons parmi les 6 restants. Le nombre de tirages possibles est alors

$$\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} = \frac{9!}{6!3!} \times \frac{6!}{2!4!} = \frac{9!}{4!3!2!} = 1260$$

(b) On observe que le nombre de tirages possibles est le même pour chacune des procédures. Ceci signifie qu'au point de vue dénombrement, les trois procédures sont parfaitement équivalentes et pourront être utilisées indifféremment le cas échéant (par exemple pour des calculs de probabilités).

2) (a) On choisit 6 jetons parmi les 9 contenus dans le sac, le nombre de tirages est donc

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$$

(b) (i) On obtient un tirage contenant les jetons 1 et 2 en prenant ces deux jetons, puis en ajoutant 4 jetons pris parmi les 7 autres : le nombre de tirages est donc

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{6} = 35$$

(ii) Un tirage ne contenant ni le jeton 1 ni le jeton 2 est obtenu en choisissant les 6 jetons parmi les 7 autres : le nombre de tirages possibles est donc

$$\binom{7}{6} = 7$$

(iii) On obtient un tirage contenant le 1 et pas le 2 en prenant le jeton 1, puis en ajoutant 5 jetons pris parmi les 7 autres (le 2 étant exclu) : il y en a

$$\binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

De même, il y a 21 tirages contenant le 2 et pas le 1.

De ce fait, il y a 42 de tirages contenant seulement l'un des jetons 1 et 2.

(c) On vient de dénombrer de deux façons différentes les tirages de six jetons dans le sac :

- d'abord de manière directe ;
- puis de manière indirecte, en distinguant ceux qui contiennent ou pas 1 ou 2.

Dans les deux cas, on en trouve $84 = 35 + 7 + 21 + 21 \dots$ ce qui est plutôt rassurant !

Exercice 8

1) Soit $n \geq 1$

(a) Soit $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Alors

$$\begin{aligned} k \binom{n}{k} &= k \times \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= k \times \frac{n \times (n-1)!}{k \times (k-1)! \times (n-k)!} \\ &= n \times \frac{(n-1)!}{(k-1)! (n-k)!} \\ &= \boxed{n \binom{n-1}{k-1}} \end{aligned}$$

(b) De ce fait,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} && \text{(en posant } \ell = k-1 \text{)} \\
 &= n \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 1^\ell 1^{n-1-\ell} \\
 &= \boxed{n 2^{n-1}} && \text{(d'après la formule du binôme de Newton)}
 \end{aligned}$$

2) Soit $n \geq 2$. Pour tout $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, on a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
 k(k-1) \binom{n}{k} &= (k-1) \times k \binom{n}{k} \\
 &= (k-1) \times n \binom{n-1}{k-1} \\
 &= n \times (k-1) \binom{n-1}{k-1} \\
 &= \boxed{n(n-1) \binom{n-2}{k-2}}
 \end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} &= \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \\
 &= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} && \text{(en posant } \ell = k-2 \text{)} \\
 &= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} \binom{n-2}{\ell} 1^\ell 1^{n-2-\ell} \\
 &= \boxed{n(n-1) 2^{n-2}} && \text{(cf. binôme de Newton)}
 \end{aligned}$$

Exercice 9

1) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + y - z = -2 & (L_2) \\ -3y + 3z = 9 & (L_1 - 2L_2) \\ z = 2 & (L_3 - 2L_1) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x + y - z = -2 \\ y - z = -3 \\ z = 2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = 2 \\ y = z - 3 = -1 \\ x = -y + z - 2 = 1 \end{cases} \\
 &\iff \boxed{(x, y, z) = (1, -1, 2)}
 \end{aligned}$$

2) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{aligned} \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ x + 3z = 10 \\ x + y + z = 7 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ -2y + 3z = 5 & (L_3 - L_1) \\ -y + z = 2 & (L_4 - L_1) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = -2 & (-L'_4) \\ z = 5 & (L'_2 + 2L'_4) \\ 2z = 6 & (L'_3 + L'_2) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x + 2y = 5 \\ y - z = -2 \\ z = 5 \\ 0 = -4 & (L''_4 - 2L''_3) \end{cases} \end{aligned}$$

si bien que ce second système n'admet pas de solution.

3) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$(S) : \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x + my = 2m^2 - 1 & (L_2) \\ (1 - m^2)y = -2m^3 + 3m - 1 & (L_1 - mL_2) \end{cases}$$

On a maintenant besoin de diviser la seconde équation par $m^2 - 1$, ce qui n'est possible que si $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Il faut donc distinguer les différents cas.

Si $m = 1$

$$\text{On a } (S) \iff \begin{cases} x + y = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 - y \\ y = y \end{cases} \iff \boxed{(x, y) = (1 - y, y) \text{ avec } y \in \mathbb{R}}$$

On obtient une infinité de solutions, paramétrées par y .

Si $m = -1$

$$\text{Alors } (S) \iff \begin{cases} x - y = 1 \\ 0 = -2 \end{cases} \text{ donc le système n'a pas de solution.}$$

Si $|m| \neq 1$

Notons dans ce cas que

$$1 - m^2 = (1 - m)(m + 1) \quad \text{et} \quad -2m^3 + 3m - 1 = (m - 1)(-2m^2 - 2m + 1)$$

$$\text{si bien que} \quad \frac{-2m^3 + 3m - 1}{1 - m^2} = \frac{2m^2 + 2m - 1}{1 + m} = 2m - \frac{1}{1 + m}$$

$$\begin{aligned} \text{Il en découle que } (S) &\iff \begin{cases} x + my = 2m^2 - 1 \\ y = \frac{-2m^3 + 3m - 1}{1 - m^2} = 2m - \frac{1}{1 + m} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 2m^2 - 1 - my = -1 + \frac{m}{m + 1} = -\frac{1}{m + 1} \\ y = 2m - \frac{1}{1 + m} \end{cases} \\ &\iff \boxed{(x, y) = \left(-\frac{1}{1 + m}, 2m - \frac{1}{1 + m}\right)} \end{aligned}$$

On obtient une seule solution, qui dépend de m .