

Devoir Surveillé n°5 de MathématiquesSamedi 2 Mars 2024 (*Durée : 3 heures*)**Exercice 1**

Calculer les intégrales suivantes :

$$(a) \int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} \quad (b) \int \frac{\sin^3 x \, dx}{1 + \cos^2 x} \quad (c) \int_0^1 \ln(1 + \ell) \, d\ell$$

Exercice 2Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} \, dx$.

- 1) (a) Démontrer que I_n existe pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Calculer I_0 .
- 2) (a) Démontrer que $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire alors I_1 , puis I_2 et I_3 .
- 3) Utiliser les résultats précédents pour calculer $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x) e^{-x} \, dx$.
- 4) (a) Démontrer que $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n \, dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 3On considère l'équation différentielle **(E)** : $x y'(x) - (2x + 1)y(x) = 8x^2$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

- 1) Soit f une solution de l'équation **(E)**. Montrer que la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est une solution de l'équation **(F)** : $y' = 2y + 8$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 2) Soit h une solution de l'équation **(F)** sur $]0; +\infty[$. Montrer que la fonction $f : x \mapsto xh(x)$ est une solution de **(E)** sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- 3) Résoudre l'équation **(F)** et en déduire toutes les solutions de l'équation **(E)**.

Exercice 4Démontrer par récurrence que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.*Attention, cette somme ne fait intervenir que des entiers impairs.*

Exercice 5

On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} a_0 = 20 \\ a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{4} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0 = 60 \\ b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{4} \end{cases} \text{ pour } n \in \mathbb{N}$$

1) On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Procéder de même avec la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) Exprimer enfin a_n et b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

1) (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Donner l'expression de $\binom{n}{k}$.

Rappeler les diverses propriétés permettant de dresser le triangle de Pascal.

(b) Remplir le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$.

2) (a) Rappeler la formule du binôme de Newton.

(b) En déduire le développement de $(1 - x)^6$.

Exercice 7

1) Un sac contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. Dans un premier temps, on tire 5 jetons dont 3 sont mis dans une urne A et 2 dans une urne B. On envisage trois procédures.

Procédure 1 : on tire 5 jetons dans le sac puis, parmi ceux-ci, on tire 3 jetons que l'on met dans l'urne A ; les 2 jetons restants sont alors placés dans l'urne B.

Procédure 2 : on tire 5 jetons dans le sac puis, parmi ceux-ci, on tire 2 jetons que l'on met dans l'urne B ; les 3 jetons restants sont alors placés dans l'urne A.

Procédure 3 : on tire 3 jetons dans le sac que l'on met dans l'urne A puis, parmi les jetons restant dans le sac, on tire 2 jetons que l'on met dans l'urne B.

(a) Pour chacune des ces procédures, calculer le nombre de tirages possibles.

(b) Qu'observe-t-on ? Que peut-on en déduire ?

2) Dans un second temps, on tire simultanément 6 jetons du sac.

(a) Combien y a-t-il de tirages distincts possibles ?

(b) On s'intéresse dans cette question aux jetons numérotés 1 et 2.

(i) Combien y a-t-il de tirages contenant les jetons 1 et 2 ?

(ii) Combien y a-t-il de tirages ne contenant ni le jeton 1, ni le jeton 2 ?

(iii) Combien y a-t-il de tirages contenant seulement l'un des jetons 1 ou 2 ?

(c) Quel est le lien entre les résultats des questions 2.(a) et 2.(b) ?

Exercice 8

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier strictement positif.

(a) Pour $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, exprimer $k \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

2) Procéder de même pour calculer $\sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k}$ pour un entier $n \geq 2$.

Exercice 9

Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1) \begin{cases} 2x - y + z = 5 \\ x + y - z = -2 \\ 4x - 2y + 3z = 12 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2y - z = 1 \\ x + 3z = 10 \\ x + y + z = 7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} mx + y = 2m - 1 \\ x + my = 2m^2 - 1 \end{cases} \quad (\text{ici, } m \text{ est un paramètre réel})$$