Devoir Surveillé n°6 de Mathématiques

Samedi 23 Mars 2024 *(Durée : **3 heures**)*

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 5 cm et AC = 3 cm.
On place les points I et J sur [AC] de sorte que AI = IJ = JC = 1 cm.

1) Calculer $\overrightarrow{\mathrm{BI}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BJ}}$, BI et BJ.
2) En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\mathrm{IBJ}}\right)$.

On pourra utiliser un repère orthonormé adapté à la figure, afin de faciliter les calculs. Typiquement, le repère d'origine A et d'axes (AB) et (AC).

Exercice 2

Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble de $\mathbb{R}^3$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

1) Identifier l'ensemble $\mathscr{D}$, en donnant un point et un vecteur directeur.
   Exhiber un second point de $\mathscr{D}$.
2) Donner une représentation de la droite Δ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par $\mathrm{B}(-4, 1, 5)$.
3) Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$ contenant $\mathscr{D}$ et Δ.
4) Soit $\mathscr{D}'$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -5 + 5u \\ y = -4 + 8u \\ z = 10 + 9u \end{cases} \quad (u \in \mathbb{R})$.

   Montrer que $\mathscr{D}' \perp \mathscr{P}$, puis que la droite $\mathscr{D}'$ coupe le plan $\mathscr{P}$ en un point de $\mathscr{D}$.

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient les points $\mathrm{A}(4;-4)$, $\mathrm{B}(10;8)$ et $\mathrm{C}(-8;8)$.

1) Déterminer les équations de deux hauteurs du triangle ABC.
2) Calculer les équations de deux médianes du triangle ABC.
3) En déduire les coordonnées de l'orthocentre et du centre de gravité

Exercice 4

Soit $\mathrm{P}(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$ un polynôme de degré trois.

1) Vérifier que -3 est racine de P.
2) Trouver un polynôme $\mathrm{Q}(x)$ tel que l'on ait $\mathrm{P}(x) = (x+3)\,\mathrm{Q}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3) Déterminer les racines de Q, puis factoriser P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Calculer les limites suivantes à l'aide de développements limités d'ordres finement choisis :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] \qquad\qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{1+\ln x}$$

Exercice 6

1) (a) Donner les DL_2 en 0 de $\sin x$, $\cos x$ et $\tan x$.

   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x-\tan x-1}{x^2}$

2) (a) Donner les DL_2 en 0 de $\dfrac{1}{1+x^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   (b) En déduire les DL_3 en 0 de $\arctan x$ et $\arcsin x$.

   (c) Donner enfin un équivalent simple en 0 de $\arctan x - \arcsin x$.

3) (a) Soient $a>0$ et $b\in\mathbb{R}$. Rappeler la définition de a^b à l'aide de exp et ln.

   (b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-3x}\right)^{1/x}$ *sans s'occuper de l'ensemble de définition de cette expression.*

Exercice 7

On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}$. Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1) *On va dans un premier temps s'intéresser au comportement de f en l'infini.*

   (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (b) Montrer l'existence d'asymptotes en $-\infty$ et en $+\infty$.

   (c) Préciser les positions de ces asymptotes par rapport à $\mathscr{C}_f$.

2) *Examinons maintenant de plus près ce qui se passe en* 0.

   (a) Déterminer le DL_2 de f en 0.

   (b) En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
   On donnera la valeur de $f(0)$.

   (c) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On précisera sa position par rapport à $\mathscr{C}_f$.

3) *Il ne reste plus qu'à étudier les variations de f.*

   (a) Démontrer que $\mathrm{e}^x \geqslant x+1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

   (b) Calculer la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}^*$.

   (c) Dresser le tableau de variations de f.

4) Représenter l'allure de $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal du plan.