Chapitre n°1 : Équations et Inéquations

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Énoncer et démontrer les trois identités remarquables.

Réponse

On a : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ pour tous réels a et b. On établit ces résultats en développant « bêtement » les produits comme suit :

1) $(a+b)^2 = (a+b)\times(a+b) = (a^2+ab)+(ba+b^2) = a^2+2ab+b^2$.
2) $(a-b)^2 = (a-b)\times(a-b) = (a^2-ab)-(ba-b^2) = a^2-2ab+b^2$.
3) $(a+b)\times(a-b) = (a^2-ab)+(ba-b^2) = a^2-b^2$.

Question 2.

Énoncer et démontrer les deux propriétés algébriques de la racine carrée.

Réponse

On a : $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ et $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ pour tous réels $a \geqslant 0$ et $b > 0$.

1) Comme $\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} \geqslant 0$ alors $\sqrt{a}\times\sqrt{b} \geqslant 0$. De plus, $\left(\sqrt{a}\times\sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2\times\sqrt{b}^2 = ab$. Par définition de la racine carrée, on a ainsi $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$.
2) On sait que $a = \dfrac{a}{b}\times b$ par définition de la division. On déduit alors du résultat précédent que $\sqrt{a} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\times\sqrt{b}$ d'où $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ après division par le réel strictement positif $\sqrt{b}$.

Question 3.

Rappeler et démontrer les relations entre coefficients et racines d'un polynôme du second degré.

Réponse

Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$) un polynôme du second degré de discriminant positif et de racines x_1 et x_2 (elle peuvent être identiques). Alors $x_1+x_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $x_1\times x_2 = \dfrac{c}{a}$.

En effet, les racines de $\mathrm{P}(x)$ ont pour expressions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ donc

$$x_1+x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

et
$$x_1\times x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\times\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{b^2-\Delta}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Question 4.

Rappeler et démontrer les propriétés des sommes et produits d'inégalités.

Réponse

Soient a, b, c et d des réels.

- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors $a + c \leqslant b + d$.
- Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $ac \leqslant bd$.

Pour démontrer ceci, on va utiliser la caractérisation $x \leqslant y \Longleftrightarrow y - x \geqslant 0$.
Par hypothèse, on sait que $b - a \geqslant 0$ et $d - c \geqslant 0$.

1) On a $(b + d) - (a + c) = (b - a) + (d - c) \geqslant 0$ comme somme de nombres positifs.
2) Astuce : on introduit le terme bc pour faire apparaître des factorisations intéressantes. On obtient ainsi $bd - ac = (bd - bc) + (bc - ac) = b(d - c) + c(b - a) \geqslant 0$ comme somme de produits de nombres positifs.

Question 5.

Énoncer et démontrer les règles de passage au carré dans une inégalité.

Réponse

Soient a et b des réels.

- Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $0 \leqslant a^2 \leqslant b^2$.
- Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $0 \leqslant b^2 \leqslant a^2$.

Dans les deux cas, on a $b - a \geqslant 0$ donc $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$ est du signe de $b + a$.

1) Si $0 \leqslant a \leqslant b$, alors $b + a \geqslant 0$ donc $b^2 - a^2 \geqslant 0$.
2) Si $a \leqslant b \leqslant 0$, alors $b + a \leqslant 0$ donc $b^2 - a^2 \leqslant 0$.

Question 6.

Énoncer et démontrer les règles de passage à l'inverse dans une inégalité.

Réponse

Soient a et b des réels non nuls **de même signe**. Si $a \leqslant b$, alors $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$.

En effet, supposons que $a \leqslant b$ et que a et b sont de même signe.

Il en découle que $b - a \geqslant 0$ et $ab \geqslant 0$. De ce fait, $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = \dfrac{b - a}{ab} \geqslant 0$.

Dans le cas où $a < 0 < b$, on a bien évidemment $\dfrac{1}{a} < 0 < \dfrac{1}{b}$.