Chapitre n°10 : Équations différentielles

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
Énoncer et démontrer le résultat.

Réponse

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et A une primitive de a sur I. Les solutions sur I de l'équation différentielle homogène $(\mathbf{E}_0)$: $y' + ay = 0$ sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{g_{\mathrm{C}} : t \longmapsto \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}}$ avec $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ une constante.

On va montrer que ces fonctions sont bien solutions de $(\mathbf{E}_0)$, puis que ce sont les seules.

- *Ce sont des solutions de $(\boldsymbol{E}_0)$ sur* I : soit $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On a alors
$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad {g_{\mathrm{C}}}'(t) = \mathrm{C} \times (-\mathrm{A}'(t)) \times \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} = -a(t)\, g_{\mathrm{C}}(t)$$
donc la fonction g_{C} est solution de $(\mathbf{E}_0)$ sur I.
- *Ce sont les seules solutions de $(\boldsymbol{E}_0)$ sur* I : soit y une solution de cette équation sur I et considérons la fonction $z : t \longmapsto y(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$. Sa dérivée a pour expression
$$\forall\, t \in \mathrm{I} \qquad z'(t) = \left[y'(t) + a(t)y(t)\right]\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)} = 0$$
donc la fonction z est constante sur I. Il existe ainsi $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $z(t) = \mathrm{C}$ soit $y(t) = \mathrm{C}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} = g_{\mathrm{C}}(t)$ pour tout $t \in$ I.

Question 2.

Exposer la méthode de variation de la constante dans le cas général.
Montrer qu'elle nous conduit à un simple calcul de primitive.

Réponse

Soient a et b deux fonctions continues sur un intervalle I, et A une primitive de a sur I. La méthode de variation de la constante consiste à rechercher une solution particulière de l'équation **(E)** : $y' + ay = b$ sous la forme $f_0 : t \longmapsto \mathrm{C}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$ avec C une fonction dérivable.

En effet, pour une telle fonction on aura
$$f_0{}'(t) = \mathrm{C}'(t) \times \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} - \mathrm{C}(t) \times \mathrm{A}'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} = \mathrm{C}'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} - a(t)\,\mathrm{C}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$$

d'où
$$f_0{}'(t) + a(t)\,f_0(t) = f_0{}'(t) + a(t)\,\mathrm{C}(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} = \mathrm{C}'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)}$$

Ainsi,
$$f_0 \text{ solution de } \mathbf{(E)} \iff \mathrm{C}'(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(t)} = b(t) \iff \mathrm{C}'(t) = b(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$$

Il suffit « simplement » de trouver une primitive de $t \longmapsto b(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}(t)}$ pour obtenir l'expression de la fonction C puis celle d'une solution particulière f_0.

Question 3.

Rappeler sans démonstration l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre.

RÉPONSE

Soient a et $b \in \mathbb{R}$. On note $(\mathbf{E}_0)$ l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$ et Δ le discriminant de son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{R}$. Les solutions de $(\mathbf{E}_0)$ sont toutes les fonctions $\boxed{g : t \longmapsto \mathrm{A}e^{r_1 t} + \mathrm{B}e^{r_2 t}}$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double réelle $r_0 \in \mathbb{R}$. Les solutions de $(\mathbf{E}_0)$ sont toutes les fonctions $\boxed{g : t \longmapsto (\mathrm{A}t + \mathrm{B})\, e^{r_0 t}}$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.
- Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r = \rho + i\omega$ et $\overline{r} = \rho - i\omega \in \mathbb{C}$, avec $\rho \in \mathbb{R}$ et $\omega > 0$. Les solutions de l'équation homogène $(\mathbf{E}_0)$ sont toutes les fonctions $\boxed{g : t \longmapsto [\mathrm{A}\cos(\omega t) + \mathrm{B}\sin(\omega t)]\, e^{\rho t}}$ avec A et B $\in \mathbb{R}$.

Question 4.

Retrouver l'expression des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre dans le cas où l'équation caractéristique admet une racine double.

RÉPONSE

Soient a et $b \in \mathbb{R}$. On note $(\mathbf{E}_0)$ l'équation homogène $y'' + ay' + by = 0$.

- Comme son équation caractéristique $r^2 + ar + b = 0$ a une racine double valant $r_0 = -a/2$, le discriminant $\Delta = a^2 - 4b$ de celle-ci est nul donc $b = a^2/4$.
- Considérons une fonction y deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et posons $z : t \longmapsto y(t)\, e^{-r_0 t}$.

  Alors $\quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad z'(t) = [-r_0 y(t) + y'(t)]\, e^{-r_0 t}$

  et
$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \begin{aligned} z''(t) &= [-r_0 y'(t) + y''(t) - r_0(-r_0 y(t) + y'(t))]\, e^{-r_0 t} \\ &= [{r_0}^2 y(t) - 2r_0 y'(t) + y''(t)]\, e^{-r_0 t} \\ &= \left[\frac{a^2}{4}\, y(t) + ay'(t) + y''(t)\right] e^{-r_0 t} \\ &= \Big[y''(t) + ay'(t) + by(t)\Big]\, e^{-r_0 t} \end{aligned}$$

  De ce fait, y est solution de $(\mathbf{E}_0)$
$$\begin{aligned} &\iff y'' + ay' + by = 0 \\ &\iff z'' = 0 \\ &\iff z' = \mathrm{C^{te}} = \mathrm{A} \\ &\iff z : t \longmapsto \mathrm{A}t + \mathrm{B} \quad \text{avec A et B} \in \mathbb{R} \\ &\iff y : t \longmapsto (\mathrm{A}t + \mathrm{B})\, e^{r_0 t} \quad \text{avec A et B} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

  quod erat demonstrandum !