Chapitre n°11 : Autour de la récurrence

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Énoncer et démontrer le principe de récurrence.

Réponse

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat portant sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

1) la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie ;
2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie, alors la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

On en déduit que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Pour démontrer ceci, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe des entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que la proposition $\mathscr{P}(n)$ soit fausse. On appelle A leur ensemble.

- Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, il admet un plus petit élément $m = \min(\mathrm{A})$.
- En particulier $m \in \mathrm{A}$, donc $m \in \mathbb{N}$ et la proposition $\mathscr{P}(m)$ est fausse.
  On en déduit que $m \neq 0$ puisque la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
  Ainsi $m \geqslant 1$ et $m-1 \in \mathbb{N}$.
- Enfin $m-1 < m$ donc $m-1 \notin \mathrm{A}$, si bien que $\mathscr{P}(m-1)$ est vraie.
  Il en découle par hérédité que $\mathscr{P}(m)$ vraie, ce qui nous conduit à une contradiction.

Question 2.

Rappeler la définition et la technique d'étude des suites arithmético-géométriques.

Réponse

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe un couple $(q,r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $q \neq 1$, $r \neq 0$ et $u_{n+1} = q\,u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Voici comment déterminer son expression :

❶ On calcule la solution $a \in \mathbb{R}$ de l'équation $x = qx + r$.

❷ On vérifie que la suite de terme général $v_n = u_n - a$ est géométrique de raison q.

❸ On en déduit l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

En effet,
$$\begin{cases} u_{n+1} = q\,u_n + r & \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \\ \quad a = q\,a + r \end{cases}$$

d'où
$$\forall\, n \in \mathbb{N} \qquad (u_{n+1} - a) = q\,(u_n - a) \qquad \text{par soustraction}$$

Ceci montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q.
Son premier terme étant $v_0 = u_0 - a$, elle a pour expression $v_n = (u_0 - a)\,q^n$.
Enfin $u_n = v_n + a$, si bien que $u_n = a + (u_0 - a)\,q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Question 3.

Sommes de termes consécutifs de suites arithmétiques et de suites géométriques.

Rappeler les formules et les démontrer dans le cas de sommes de la forme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Réponse

Pour une suite arithmétique, la formule est

$$\text{somme} = \text{nombre de termes} \times \left(\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\right)$$

En particulier, $\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ pour une suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison r.

En effet, pour tout $p \in [\![0\,; n]\!]$

$$u_p + u_{n-p} = u_0 + p\,r + u_0 + (n-p)\,r = u_0 + u_0 + n\,r = u_0 + u_n$$

et comme
$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \\ &= u_n + u_{n-1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0 \end{aligned}$$

alors
$$\begin{aligned} 2S_n &= (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + (u_2 + u_{n-2}) + \cdots + (u_{n-1} + u_1) + (u_n + u_0) \\ &= (n+1) \times (u_0 + u_n) \end{aligned}$$

ce qui conduit au résultat en divisant par 2.

Pour une suite géométrique de raison différente de 1, la formule est

$$\text{somme} = \text{premier terme} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

En particulier, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$ pour une suite géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q \neq 1$.

En effet, on a $q\,u_p = u_{p+1}$ pour tout $p \in [\![0\,; n]\!]$. Comme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$$

alors
$$q\,S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n + u_{n+1}$$

d'où
$$S_n - q\,S_n = u_0 - u_{n+1} = u_0 - q^{n+1}\,u_0$$
par soustraction

soit
$$(1-q)\,S_n = u_0\left(1 - q^{n+1}\right)$$

ce qui conduit au résultat en divisant par le réel non nul $1-q$.

Question 4.

> *Rappeler la définition et l'expression générale des suites récurrentes linéaires d'ordre deux. Démonstration dans le cas où l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes.*

RÉPONSE

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe un couple $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $u_{n+2}=a\,u_{n+1}+b\,u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Notons **(E)** son équation caractéristique $x^2=ax+b$.

- Si **(E)** admet deux racines réelles distinctes q_1 et q_2, alors il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n=\mathrm{A}\,{q_1}^n+\mathrm{B}\,{q_2}^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- Si **(E)** admet une racine double q_0, il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n=(\mathrm{A}n+\mathrm{B})\,{q_0}^n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
- Si **(E)** admet deux racines complexes conjuguées distinctes $q=\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\overline{q}=\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, alors il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n=\rho^n\ (\mathrm{A}\ \cos(n\theta)+\mathrm{B}\ \sin(n\theta))}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Démontrons le premier point. Pour cela, on considère le système linéaire

$$(\mathrm{S})\ \begin{cases} x+y=u_0\\ q_1x+q_2y=u_1\end{cases} \iff \begin{cases} x+y=u_0\\ (q_1-q_2)x=u_1-q_2u_0\end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{u_1-q_2u_0}{q_1-q_2}=\mathrm{A}\\ y=u_0-x=\mathrm{B}\end{cases}$$

Il possède ainsi une unique solution (A,B). Notons alors $v_n=\mathrm{A}\,{q_1}^n+\mathrm{B}\,{q_2}^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$: on va démontrer par récurrence double que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $v_n=u_n$ ».

- *Initialisation* : par définition, A et B sont les solutions du système (S) donc
$$v_0=\mathrm{A}+\mathrm{B}=u_0 \qquad \text{et} \qquad v_1=q_1\mathrm{A}+q_2\mathrm{B}=u_1$$
donc les propositions $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies.
- *Hérédité* : soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que les propositions $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies. Ainsi $v_n=u_n$ et $v_{n+1}=u_{n+1}$. On déduit alors de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que
$$\begin{aligned} u_{n+2}&=au_{n+1}+bu_n\\ &=av_{n+1}+bv_n && \text{(hérédité)}\\ &=a\left(\mathrm{A}\,{q_1}^{n+1}+\mathrm{B}\,{q_2}^{n+1}\right)+b\left(\mathrm{A}\,{q_1}^n+\mathrm{B}\,{q_2}^n\right) && \text{(définition de } v)\\ &=\mathrm{A}\left(a\,{q_1}^{n+1}+b\,{q_1}^n\right)+\mathrm{B}\left(a\,{q_2}^{n+1}+b\,{q_2}^n\right)\\ &=\mathrm{A}\,{q_1}^n(aq_1+b)+\mathrm{B}\,{q_2}^n(aq_2+b)\\ &=\mathrm{A}\,{q_1}^n{q_1}^2+\mathrm{B}\,{q_2}^n{q_2}^2 && \text{(d'après } \mathbf{(E)})\\ &=\mathrm{A}\,{q_1}^{n+2}+\mathrm{B}\,{q_2}^{n+2}\\ &=v_{n+2}\end{aligned}$$
ce qui prouve que la proposition $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.
- *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$, si bien que

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ u_n=\mathrm{A}\,{q_1}^n+\mathrm{B}\,{q_2}^n.}$$