Chapitre n°12 : Ensembles finis et dénombrement

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Énoncer et démontrer la propriété des sommes télescopiques. Application : calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,k!$.

Réponse

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $\boxed{\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1.}$ En effet :

$$\begin{aligned}
\mathrm{S}_n &= (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + (x_4 - x_3) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n+1} - x_n) \\
&= (x_{n+1} - x_n) + (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_4 - x_3) + (x_3 - x_2) + (x_2 - x_1) \\
&= x_{n+1} - x_1
\end{aligned}$$

Application : pour tout $k \geqslant 1$, on a $k\,k! = (k+1-1)\,k! = (k+1)! - k!$ si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} k\,k! = \sum_{k=1}^{n} \big((k+1)! - k!\big) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$$

Question 2.

Énoncer les propriétés des sommes triangles. Application : calculer $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i}$.

Réponse

Soit n un entier naturel non nul et $\big(a_{ij}\big)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une famille de complexes. On a :

$$\boxed{\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{ij}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{ij}}$$

Application : on déduit de la première égalité que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} \frac{j}{i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} \frac{j}{i} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} j \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \times \frac{i(i+1)}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (i+1) = \frac{1}{2} \times \frac{n(n+3)}{2} = \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

en reconnaissant des calculs de termes successifs de suites arithmétiques.

Question 3.

Citer les différentes propriétés permettant de construire le triangle de Pascal.
Démontrer la relation de Pascal puis construire le triangle de Pascal.

RÉPONSE

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

   Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0 ; n]\!]$, on a $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

   Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1 ; n]\!]$, on a $\boxed{\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}}$: **relation de Pascal**.

2) Soit E un ensemble de cardinal $n+1$. On fixe $e \in \mathrm{E}$ et l'on note $\mathrm{E}' = \mathrm{E} \setminus \{e\}$: c'est un ensemble de cardinal n. Parmi les $\binom{n+1}{p}$ combinaisons de p éléments de E :

   - certaines contiennent e et $p-1$ éléments de E′, il y en a donc $\binom{n}{p-1}$
   - les autres sont formées de p éléments de E′ et sont ainsi au nombre de $\binom{n}{p}$.

   Il en découle ainsi que $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}$.

3) On peut ainsi construire le triangle de Pascal jusqu'à $n = 6$:

1						
1	1					
1	2	1				
1	3	3	1			
1	4	6	4	1		
1	5	10	10	5	1	
1	6	15	20	15	6	1

Question 4.

Énoncer et démontrer par récurrence la formule du binôme de Newton.

Réponse

Soient $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}.}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathscr{P}(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}$ ».

- *Initialisation* : $\sum_{p=0}^{0} \binom{0}{p} a^p\, b^{0-p} = \binom{0}{0} = 1 = (a+b)^0$ donc la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- *Hérédité* : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)\,(a+b)^n = (a+b)\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p} && \text{(hérédité)}\\
&= \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{p+1}\, b^{n-p} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n+1-p}\\
&= \sum_{q=1}^{n+1} \binom{n}{q-1} a^q\, b^{n+1-q} + \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n+1-p} && (q = p+1)\\
&= \left[\sum_{q=1}^{n} \binom{n}{q-1} a^q\, b^{n+1-q} + \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0\right] + \left[\binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n+1-p}\right]\\
&= \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \left[\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p}\right] a^p\, b^{n+1-p} + \binom{n}{n} a^{n+1}\, b^0 && (p = q)\\
&= \binom{n+1}{0} a^0\, b^{n+1} + \sum_{p=1}^{n} \binom{n+1}{p} a^p\, b^{n+1-p} + \binom{n+1}{n+1} a^{n+1}\, b^0 && \text{car } \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1\\
&= \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} a^p\, b^{n+1-p}
\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- *Conclusion* : le principe de récurrence permet d'affirmer que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, si bien que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}.}$$