Chapitre n°13 : Systèmes linéaires

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Donner la définition d'un système linéaire échelonné et un ou deux exemples.

Réponse

Un système linéaire est dit **échelonné** si :

- dès que le membre de gauche d'une ligne est nul, ceux des suivantes le sont aussi ;
- dans le cas où les inconnues sont notées $x_1, x_2, \dots, x_p$, le plus petit indice des inconnues apparaissant dans le membre de gauche croît strictement d'une ligne à l'autre ;
- dans le cas général, le nombre d'inconnues apparaissant dans le membre de gauche décroît strictement d'une ligne à l'autre.

On appelle alors **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne dont le membre de gauche est non nul. Par exemple, le premier système est échelonné mais pas le second :

$$\begin{cases} x + 5y + 6z = 3 \\ \phantom{x + {}} 2y + 4z = -7 \\ \phantom{x + 5y + {}} 3z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 5y + 6z = 7 \\ \phantom{x + 5y + {}} 4z = 12 \\ \phantom{x + 5y + {}} 3z = 9 \end{cases}$$

Question 2.

Présenter la méthode du pivot de Gauss-Jordan.

Réponse

Voici comment procéder pour échelonner un système linéaire de n équations à p inconnues notées $x_1, x_2, \dots, x_p$.

❶ On choisit une ligne dont le coefficient de x_1 est non nul **et si possible égal à 1**.
On la place en première position.

❷ On ajoute des multiples de cette ligne aux autres lignes afin d'éliminer la variable x_1.

❸ **On ne touche plus à la première ligne** et on applique le procédé au système de $n-1$ équations à $p-1$ inconnues ainsi obtenu.

❹ On répète ceci jusqu'à l'apparition d'un système échelonné.

Question 3.

> *Rappeler la définition du rang d'un système linéaire.*
> *Exposer la méthode de résolution d'un système échelonné.*

Réponse

Le rang d'un système linéaire est égal au nombre de pivots de tout système linéaire échelonné équivalent au système initial.

Considérons un système linéaire échelonné à p inconnues de rang r.

❶ Si ce système comporte une équation du type $0 = b_m$ avec $b_m \neq 0$, c'est évidemment un **système incompatible**. L'ensemble des solutions est alors l'ensemble vide.

❷ Sinon, on compare son rang au nombre d'inconnues.

- Si $r = p$, alors le système possède une unique solution : c'est un système de Cramer.

  On le résout en partant de la dernière équation et en remontant de proche en proche.

- Si $r < p$, alors le système possède une infinité de solutions et l'ensemble des solutions est paramétré par $p - r$ inconnues appelées **inconnues secondaires** : ce sont celles qui ne sont pas collées aux pivots.

  Pour le résoudre, on passe tous les termes dépendant de ces inconnues secondaires dans le second membre et l'on résout le système de Cramer obtenu.