Chapitre n°14 : Géométrie du plan et de l'espace

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Donner la définition du produit scalaire et son expression dans une base orthonormée du plan.

Réponse

On appelle **produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le nombre réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.}$

Question 2.

Donner la définition du déterminant et son expression dans une base orthonormée directe.

Réponse

On appelle **déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$** le nombre réel $\det(\vec{u}, \vec{v})$ défini par :

- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$;
- $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v})$ sinon.

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. Alors $\boxed{\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'.}$

Question 3.

Donner la forme de l'équation cartésienne d'une droite du plan.
Expliquer comment calculer la distance d'un point à cette droite.

Réponse

Toute droite du plan de vecteur normal $\vec{n} = a\vec{i} + b\vec{j}$ admet une équation cartésienne de la forme $\boxed{ax + by + c = 0}$ avec $c \in \mathbb{R}$.

La distance du point $M(x_0, y_0)$ à cette droite est alors $\boxed{d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.}$

Question 4.

Donner les représentations paramétriques des cercles du plan et des droites de l'espace.

Réponse

Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon $\mathrm{R} \geqslant 0$. Pour tout point $\mathrm{M}(x,y)$, on a

$$\boxed{\mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{C} \text{ si, et seulement si, il existe } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = a + \mathrm{R}\cos(\theta) \\ y = b + \mathrm{R}\sin(\theta) \end{cases}}$$

Soient $\mathscr{D}$ une droite de l'espace, $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ un point de $\mathscr{D}$ et $\overrightarrow{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Pour tout point $\mathrm{M}(x,y,z)$, on a

$$\boxed{\mathrm{M}(x,y,z) \in \mathscr{D} \text{ si, et seulement si, il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}}$$