Chapitre n°2 : Trigonométrie

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Énoncer et démontrer la relation fondamentale de la trigonométrie.

RÉPONSE

Pour tous réels x et y , on a $x^2 + y^2 = 1$ si, et seulement si, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos \theta$ et $y = \sin \theta$. En particulier, $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ pour tout réel θ .

Implication directe : si $x^2 + y^2 = 1$, le point $M(x, y)$ appartient au cercle trigonométrique. Notons $\theta \in \mathbb{R}$ une abscisse curviligne de M : ce point a alors pour coordonnées cartésiennes $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.

Implication réciproque : s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$, alors $M(x, y)$ est le point d'abscisse curviligne θ sur le cercle trigonométrique. De ce fait, ses coordonnées vérifient $x^2 + y^2 = 1$ soit $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Question 2.

Retrouver par le calcul les deux expressions de la dérivée de la fonction $\tan$.

RÉPONSE

La fonction $\tan$ est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\tan' = \left(\frac{\sin}{\cos} \right)' = \frac{\sin' \times \cos - \sin \times \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$$

si bien que $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$.

Question 3.

Établir les expressions de $\sin(2a)$ et $\cos(2a)$ à l'aide des formules d'addition.

RÉPONSE

Pour tous réels a et b , on a :

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \quad \text{et} \quad \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

Par conséquent,

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

et $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$. Comme $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, alors

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$$

Question 4.

Retrouver la factorisation d'une expression de la forme $a \cos(x) + b \sin(x)$.

RÉPONSE

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pour tout réel x , on a de ce fait

$$\begin{aligned} a \cos(x) + b \sin(x) &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(x) \right) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos(x) + \sin \varphi \sin(x)) \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \varphi) \end{aligned}$$