Chapitre n°21 : Limites et continuité

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Donner la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ *dans le cas* $\ell \in \mathbb{R}$.
Application : montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Réponse

On dit que f **tend vers ℓ en $+\infty$** et l'on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in \mathscr{D}_f \qquad x > \mathrm{M} \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

Prenons le cas où f est la fonction inverse. Soit $\varepsilon > 0$. On a alors

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \qquad \left|f(x)\right| < \varepsilon \iff 1/\,|x| < \varepsilon \iff |x| > 1/\varepsilon$$

Ainsi, en prenant $\mathrm{M} = 1/\varepsilon$, on a bien

$$\forall\, x \in \mathscr{D}_f \qquad x > \mathrm{M} \Longrightarrow \left|f(x) - 0\right| < \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit que $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Question 2.

Expliquer le principe de prolongement d'une fonction par continuité.
L'illustrer sur un exemple simple.

Réponse

Soit f une fonction continue et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{D}_f$ une borne finie de son domaine de définition. Si f admet une limite finie ℓ en a, on la prolonge à $\mathbb{R} \cup \{a\}$ en posant $f(a) = \ell$. La fonction ainsi obtenue étant continue, on parle alors de prolongement par continuité.

Considérons par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \sin(x)/x$ pour tout $x \neq 0$. Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, il suffit de poser $f(0) = 1$ pour prolonger f par continuité à $\mathbb{R}$ entier.

Question 3.

Énoncer et démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Réponse

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. On suppose que :

1) la fonction f est continue sur $[a;b]$;
2) le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Il existe alors un réel $c \in [a;b]$ tel que $f(c) = k$.

Définissons d'abord la fonction continue $g : x \longmapsto f(x) - k$ sur $[a;b]$: on remarquera que « k compris entre $f(x_1)$ et $f(x_2)$ » équivaut à « $g(x_1)$ et $g(x_2)$ sont de signes opposés » c'est-à-dire « $g(x_1) \times g(x_2) \leqslant 0$ ».

Pour démontrer le théorème, on va construire par récurrence une suite croissante $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite décroissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la proposition

$$\mathscr{P}(n) : \text{« } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \text{ et } g(a_n) \times g(b_n) \leqslant 0 \text{ »}$$

soit vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va pour cela utiliser la méthode de **dichotomie**.

- On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$, de sorte que $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et prenons $c_n = \dfrac{a_n + b_n}{2}$: ainsi, $a_n < c_n < b_n$. Comme $g(a_n) \times g(b_n) \leqslant 0$, on en déduit que

  $$g(a_n) \times g(b_n) \times g(c_n)^2 = \Big[g(a_n) \times g(c_n)\Big] \times \Big[g(c_n) \times g(b_n)\Big] \leqslant 0$$

  si bien que $g(a_n) \times g(c_n) \leqslant 0$ ou $g(c_n) \times g(b_n) \leqslant 0$.

  – Si $g(a_n) \times g(c_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.
  – Si $g(c_n) \times g(b_n) \leqslant 0$, on pose $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

  Dans les deux cas, on a bien $a_n \leqslant a_{n+1}$ et $b_n \geqslant b_{n+1}$ donc les constructions des réels a_{n+1} et b_{n+1} respectent les monotonies de nos deux suites. De surcroît,

  $$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{b-a}{2^{n+1}}$$

  et $g(a_{n+1}) \times g(b_{n+1}) \leqslant 0$, si bien que la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- On déduit alors du principe de récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a vu que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme on a

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

les deux suites sont adjacentes. Elles convergent ainsi vers un même réel $c \in [a_0;b_0] = [a;b]$. La fonction g étant continue, la proposition « $g(a_n) \times g(b_n) \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ » nous conduit après passage à la limite à $g(c) = 0$ soit $k = f(c)$.