Chapitre n°22 : Dérivabilité

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Montrer qu'une fonction f est dérivable en $a \in \mathscr{D}_f$ si, et seulement si, f admet un DL_1 en a.

Réponse

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Supposons dans un premier temps que f est dérivable en a. Alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad \text{soit} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(1)$$

si bien que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f(x) - f(a) \\ &= f(a) + (x - a) \times \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= f(a) + (x - a) \times f'(a) + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x - a) \end{aligned}$$

Autrement dit, f admet un DL_1 en a. Réciproquement, supposons maintenant que f admet un DL_1 en a. Il existe alors un réel ℓ tel que

$$f(x) = f(a) + (x - a)\,\ell + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x - a)$$

d'où

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{(x - a)\,\ell + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x - a)}{x - a} = \ell + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(1)$$

si bien que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$$

Ceci montre que f est dérivable en a et que $f'(a) = \ell$.

Question 2.

Énoncer et démontrer les théorèmes de Rolle et des Accroissements finis.

Réponse

Théorème de Rolle

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$. Si $f(a) = f(b)$, il existe alors $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f'(c) = 0$.

En effet, si f est constante, sa dérivée f' est toujours nulle. Sinon, f admet un maximum et un minimum sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$. L'un d'eux étant nécessairement distinct de $f(a) = f(b)$, il est local donc f' s'annule en ce point $c \in \,]\,a\,;b\,[$. Autrement dit, $\boxed{f'(c) = 0}$ avec $c \in \,]\,a\,;b\,[$.

Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$.
Il existe alors $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.

En effet, considérons la fonction

$$g : x \longmapsto f(x) - f(a) - (x-a) \times \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Elle est continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ et dérivable sur l'intervalle $]\,a\,;b\,[$. De plus,

$$\forall x \in \,]\,a\,;b\,[\qquad g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Enfin, $g(a) = 0 = g(b)$: on déduit alors du théorème de Rolle qu'il existe un réel $c \in \,]\,a\,;b\,[$ tel que $g'(c) = 0$. Ainsi $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ donc $\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a).}$

Question 3.

Énoncer et démontrer le théorème sur les limites de dérivées.

Réponse

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in \mathrm{I}$ et f une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$.

- Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et sa dérivée vaut $f'(a) = \ell$.
  En particulier, la fonction f' est continue en a.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = +\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ ou $-\infty$.
  Ainsi, la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse a.

En effet, considérons $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$: d'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel $c(x)$ compris entre a et x tel que $f(x) - f(a) = f'(c(x))\,(x-a)$ soit

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c(x))$$

On déduit du théorème des gendarmes que $\lim\limits_{x\to a} c(x) = a$. Ainsi, si la fonction f' admet une limite en a, on a alors par composition de limites

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} f'(x)$$

ce qui permet de conclure dans chacun des cas.