

Chapitre n°23 : Les espaces vectoriels

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Donner les huit règles de calcul satisfaites dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$.

RÉPONSE

Pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in E^2$, on a les relations suivantes :

- | | |
|--|--|
| 1) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ | 5) $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ |
| 2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ | 6) $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{u}$ |
| 3) $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$ | 7) $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$ |
| 4) $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$ | 8) $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{u}$ |

Question 2.

Définition et caractérisation des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .
Montrer que l'intersection de sous-espaces vectoriels est encore un sous-espace vectoriel.

RÉPONSE

- Soit F une partie de E . Si F est un $\mathbb{K}$ -ev, on dit que c'est un sous-espace vectoriel de E .

Voici comment cela se caractérise : l'ensemble F est un sous-ev de E si, et seulement si,

- 1) $\vec{0} \in F$
- 2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2, \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F$

- Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E . Notons F leur intersection.

- 1) Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, l'ensemble F_i est un sous-ev de E donc $\vec{0} \in F_i$.

De ce fait, on a $\vec{0} \in \bigcap_{i=1}^n F_i = F$.

- 2) Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in F^2$ des scalaires et des vecteurs quelconques.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $(\vec{u}, \vec{v}) \in F_i^2$ donc $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in F_i$ qui est un sous-ev.

De ce fait, $\lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \in \bigcap_{i=1}^n F_i = F$.

Ceci montre que F est bien un ss-ev de E .

Question 3.

*Définition et propriétés de l'espace engendré par une famille finie de vecteurs.
Les démonstrations des propriétés sont attendues.*

RÉPONSE

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ une famille de p vecteurs de E .

L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est noté $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

- 1) C'est un sous-ev de E que l'on appelle le **sous-espace engendré par $\mathcal{F}$** .
- 2) C'est l'intersection de tous les sous-ev de E contenant $\mathcal{F}$.
- 3) C'est le plus petit sous-ev de E contenant la famille $\mathcal{F}$.

Démontrons ces trois propriétés.

- 1) Comme $\vec{0} = 0 \cdot \vec{e}_1$, on a bien $\vec{0} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(\vec{u}, \vec{v}) \in \text{Vect}(\mathcal{F})^2$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrivent

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^p u_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^p v_i \vec{e}_i$$

$$\text{si bien que } \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^p (\lambda u_i + \mu v_i) \vec{e}_i \in \text{Vect}(\mathcal{F}).$$

Ceci montre que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-ev de E .

- 2) Comme $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-ev de E , il contient en particulier l'intersection de tous les sous-ev de E contenant $\mathcal{F}$. (En effet, $A \cap B \cap C \cap \dots \subset A$).

Un sous-ev étant stable par combinaison linéaire, les sous-ev de E contenant $\mathcal{F}$ contiennent nécessairement $\text{Vect}(\mathcal{F})$, donc leur intersection le contient également.

Ainsi, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est l'intersection de tous les sous-ev contenant la famille $\mathcal{F}$.

- 3) On déduit du point précédent que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est contenu dans tout sous-ev de E contenant la famille $\mathcal{F}$. C'est donc le plus petit de ceux-ci.

Question 4.

Définition et caractérisation des familles libres ou génératrices de $\mathbb{R}^n$.

RÉPONSE

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ une famille de p vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$.

- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre** si, et seulement si,

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{0} \implies x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$$

Cela revient à dire que le système linéaire de n équations à p inconnues $\sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{0}$ est un système de rang p , ou encore que la famille $\mathcal{F}$ est de rang p .

- On dit que la famille $\mathcal{F}$ est **génératrice** si, et seulement si, $\text{Vect}(\mathcal{F}) = E$, c'est-à-dire

$$\forall \vec{v} \in E \quad \exists (x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i$$

Cela revient à dire que le système linéaire de n équations à p inconnues $\sum_{i=1}^p x_i \vec{e}_i = \vec{v}$ est compatible quel que soit $\vec{v} \in E$, ou encore que la famille $\mathcal{F}$ est de rang n .

Question 5.

Montrer que si l'on ajoute un vecteur à une base, elle devient liée.

Montrer que si l'on retranche un vecteur à une base, elle devient non-génératrice.

RÉPONSE

Considérons $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ une base de E .

- Soit $\vec{u} \in E$ un vecteur : comme $\mathcal{B}$ est génératrice, il s'écrit $\vec{u} = \sum_{i=1}^n u_i \vec{e}_i$ donc

$$u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + \dots + u_n \vec{e}_n - 1 \vec{u} = \vec{0}$$

Puisque $1 \neq 0$, cette relation montre que la famille $\mathcal{F} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{u}\}$ est liée.

- Fixons maintenant $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et notons $\mathcal{F}$ la famille $\mathcal{B} \setminus \{\vec{e}_j\}$.

Supposons que $\vec{e}_j \in \text{Vect}(\mathcal{F})$. Il s'écrit alors $\vec{e}_j = \sum_{i \neq j} u_i \vec{e}_i$ donc $\sum_{i \neq j} u_i \vec{e}_i - 1 \vec{e}_j = \vec{0}$.

On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ est liée, ce qui contredit le fait que c'est une base.

On a ainsi prouvé par l'absurde que $\vec{e}_j \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$. Par conséquent, la famille $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice.

Question 6.

Faire le lien entre les notions de rang, dimension et cardinal.

RÉPONSE

Le rang d'une famille $\mathcal{F}$ de E est la dimension de l'espace engendré par cette famille, c'est-à-dire le cardinal d'une base de l'espace $\text{Vect}(\mathcal{F})$.

On aura forcément $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \text{card}(\mathcal{F})$ puisque $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ et que le cardinal d'une famille génératrice toujours est supérieur ou égal à celui d'une base.

Dans le cas où $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{card}(\mathcal{F})$, la famille génératrice $\mathcal{F}$ a le même cardinal qu'une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$ donc c'est aussi une base de $\text{Vect}(\mathcal{F})$. En particulier, elle est libre.

Enfin, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace de E donc sa dimension est inférieure à celle de E . De ce fait, $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \dim(E)$.