Chapitre n°4 : Calculs de limites et de dérivées

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Donner la définition du nombre dérivé d'une fonction f en un point $a \in \mathscr{D}_f$.
Retrouver la dérivée de la fonction carrée ainsi que la valeur de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$.

Réponse

Le nombre dérivée de f en a est $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque cette limite est finie.

Prenons $f : x \longmapsto x^2$ et $a \in \mathbb{R}$: pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{x^2-a^2}{x-a} = x+a \underset{x\to a}{\longrightarrow} 2a$$

Ainsi, la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Pour tout $x > 0$ et $x \neq 1$, on a $\dfrac{\ln x}{x-1} = \dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1}$. Comme ln est dérivable en 1, on en déduit alors que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \ln'(1) = 1$.

Question 2.

Donner la définition d'une fonction négligeable devant une autre en un point donné.
Montrer que si $f = \underset{x\to a}{o}(h)$ et $g = \underset{x\to a}{o}(k)$, alors $fg = \underset{x\to a}{o}(hg) = \underset{x\to a}{o}(hk)$.
Montrer que si $f = \underset{x\to a}{o}(h)$ et $g = \underset{x\to a}{o}(h)$, alors $(\alpha f + \beta g) = \underset{x\to a}{o}(h)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Réponse

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et l'on note $f = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(g)$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Supposons que $f = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h)$ et $g = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(k)$. Alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 0 = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{k(x)} = 0$ donc

$$\frac{f(x)\,g(x)}{h(x)\,g(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(x)\,g(x)}{h(x)\,k(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \times \frac{g(x)}{k(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

par produit de limites, si bien que $fg = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(hg) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(hk)$.

Supposons que $f = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h)$ et $g = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h)$. Alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 0 = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)}$ donc

$$\frac{\alpha f(x) + \beta g(x)}{h(x)} = \alpha \times \frac{f(x)}{h(x)} + \beta \times \frac{g(x)}{h(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$$

par produit et somme de limites, si bien que $(\alpha f + \beta g) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(h)$ pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Question 3.

Donner la définition d'une fonction équivalente à une autre en un point donné.

Montrer que si $f \underset{x\to a}{\sim} h$ *et* $g \underset{x\to a}{\sim} k$*, alors* $fg \underset{x\to a}{\sim} hk$*.*

Montrer que si $f = g + \underset{x\to a}{o}(g)$*, alors* $f \underset{x\to a}{\sim} g$*.*

Réponse

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On dit que f est équivalente à g au voisinage de a et l'on note $f \underset{x\to a}{\sim} g$ si, et seulement si, $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Supposons que $f \underset{x\to a}{\sim} h$ et $g \underset{x\to a}{\sim} k$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{h(x)} = 1 = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{k(x)}$ donc

$$\frac{f(x)\,g(x)}{h(x)\,k(x)} = \frac{f(x)}{h(x)} \times \frac{g(x)}{k(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

par produit de limites, si bien que $fg \underset{x\to a}{\sim} hk$.

Supposons que $f = g + \underset{x\to a}{o}(g)$ et notons $h = f - g$. Alors $h = \underset{x\to a}{o}(g)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$. De plus, $f = g + h$ si bien que

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)+h(x)}{g(x)} = 1 + \frac{h(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

par somme de limites, si bien que $f \underset{x\to a}{\sim} g$.

Question 4.

Énoncer le théorème des Gendarmes et son corollaire.

Montrer que le corollaire et le théorème sont équivalents.

Réponse

- Soient f, g et h trois fonctions telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.
  On suppose en outre que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
  Alors la fonction g admet une limite en a et $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = \ell$.
- Soient f, g deux fonctions et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\left|f - \ell\right| \leqslant g$ au voisinage de a.
  On suppose en outre que $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Alors $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- <u>**Le théorème implique le corollaire :**</u> supposons les hypothèses du corollaire.

  Au voisinage de a, on a $\quad \left|f(x) - \ell\right| \leqslant g(x)$

  d'où $\quad -g(x) \leqslant f(x) - \ell \leqslant g(x)$

  soit $\quad \ell - g(x) \leqslant f(x) \leqslant \ell + g(x)$

  Comme $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\displaystyle\lim_{x\to a} (\ell - g(x)) = \lim_{x\to a} (\ell + g(x)) = \ell$ par sommes de limites et l'on déduit du théorème des gendarmes que $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.

- **Le corollaire implique le théorème :** supposons les hypothèses du théorème.

  Au voisinage de a, on a $\quad f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

  d'où $\quad f(x) - \ell \leqslant g(x) - \ell \leqslant h(x) - \ell$

  et $\quad \left|g(x) - \ell\right| \leqslant \max\left(\left|f(x) - \ell\right|, |h(x) - \ell|\right) \leqslant \left|f(x) - \ell\right| + |h(x) - \ell|$

  Comme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = \ell$, alors $\lim\limits_{x \to a} \left|f(x) - \ell\right| + |h(x) - \ell| = 0$ par somme et composition de limites et l'on déduit du corollaire que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell$.