Chapitre n°8 : Études de fonctions

Questions de cours posées en khôlles

Question 1.

Énoncer et démontrer le théorème sur les axes de symétries des courbes représentatives.

Réponse

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à $a \in \mathbb{R}$. Sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite Δ d'équation $x = a$ pour axe de symétrie lorsque

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad a + x \in \mathscr{D} \Longrightarrow f(a+x) = f(a-x)} \qquad \textbf{(1)}$$

Supposons en effet que la fonction f vérifie cette condition. Pour tous réels x et y, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(a+x;y) \in \mathscr{C}_f &\Longleftrightarrow a + x \in \mathscr{D} \text{ et } y = f(a+x) \\ &\Longleftrightarrow a - x \in \mathscr{D} \text{ et } y = f(a-x) \quad \text{d'après } \textbf{(1)} \text{ et la symétrie de } \mathscr{D} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{M}'(a-x,y) \in \mathscr{C}_f \end{aligned}$$

Enfin, la symétrie d'axe $\Delta : x = a$ transforme $\mathrm{M}(a+x;y)$ en $\mathrm{M}'(a-x;y)$ puisque la droite Δ est la médiatrice du segment $[\mathrm{MM}']$ *– justifier ceci avec un petit dessin , en plaçant* $\mathrm{I}(a,y)$*, milieu de* $[\mathrm{MM}']$. Ainsi, ce qui précède montre que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Δ.

Question 2.

Énoncer et démontrer le théorème sur les centres de symétries des courbes représentatives.

Réponse

Soit f une fonction numérique définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ symétrique par rapport à $a \in \mathbb{R}$. Sa courbe $\mathscr{C}_f$ admet le point $\Omega(a;b)$ pour centre de symétrie lorsque

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad a + x \in \mathscr{D} \Longrightarrow f(a+x) + f(a-x) = 2b} \qquad \textbf{(2)}$$

Supposons en effet que la fonction f vérifie cette condition. Pour tous réels x et y, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{M}(a+x;b+y) \in \mathscr{C}_f &\Longleftrightarrow a + x \in \mathscr{D} \text{ et } b + y = f(a+x) \\ &\Longleftrightarrow a - x \in \mathscr{D} \text{ et } b + y = 2b - f(a-x) \quad \text{d'après } \textbf{(2)} \text{ et la symétrie de } \mathscr{D} \\ &\Longleftrightarrow a - x \in \mathscr{D} \text{ et } f(a-x) = b - y \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{M}'(a-x;b-y) \in \mathscr{C}_f \end{aligned}$$

Enfin, la symétrie de centre $\Omega(a;b)$ transforme $\mathrm{M}(a+x;b+y)$ en $\mathrm{M}'(a-x;b-y)$ puisque l'on a $\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}'} = -\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}$ (*calculs à faire ... avec un petit dessin !*). Ainsi, ce qui précède montre que la courbe $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω.

Question 3.

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote en $+\infty$ si, et seulement si, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$.

Réponse

- *Implication directe :* supposons que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote en $+\infty$. Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ donc en posant $c(x) = f(x) - (ax + b)$, on obtient $f(x) = ax + b + c(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} c(x) = 0$. De ce fait,

$$\frac{f(x)}{x} = a + \frac{b}{x} + \frac{c(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$$

et

$$f(x) - ax = b + c(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$$

par produits et sommes de limites.

- *Implication réciproque :* supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - ax] = b$. Alors

$$f(x) - (ax + b) = [f(x) - ax] - b \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

par différence de limite, ce qui prouve que $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote en $+\infty$.

Question 4.

Définition et caractérisation des tangentes à la courbe d'une fonction.

Réponse

Une courbe $\mathscr{C}$ du plan admet la droite (T) pour **tangente en A $\in \mathscr{C}$** si la droite (AM), avec $\mathrm{M} \in \mathscr{C} \setminus \{\mathrm{A}\}$, admet la droite (T) pour position limite lorsque le point M tend vers A.

Lorsque $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f, alors $\mathrm{A}\,(a, f(a))$ et $\mathrm{M}\,(x, f(x))$ avec $a \in \mathscr{D}_f$ et $x \in \mathscr{D}_f \setminus \{a\}$, et la droite (AM) a pour pente le réel $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. De ce fait :

- Si $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| = +\infty$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en $\mathrm{A}(a, f(a))$.
- Si f est dérivable en a, alors $\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right| = f'(a)$ et la courbe $\mathscr{C}$ admet pour tangente en $\mathrm{A}(a, f(a))$ la droite passant par A et de pente $f'(a)$. Elle a ainsi pour équation $\boxed{y = f'(a)(x - a) + f(a).}$