

# X – Équations différentielles

## 1/ Généralités

**Définition** Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, et qui fait intervenir les dérivées successives de cette fonction en un point donné.  
Résoudre cette équation sur un intervalle  $I \subset \mathbb{R}$  consiste à déterminer toutes les fonctions définies et dérivables sur  $I$  qui la satisfont.

De très nombreux problèmes issus des sciences physiques, de la biologie ou de l'économie (sans parler des mathématiques !) conduisent à la résolution d'équations différentielles.

### Exemple : chute libre verticale avec force de frottement linéaire

À l'instant  $t = 0$ , un objet de masse  $m$  est lâché et tombe verticalement dans un repère  $(O; \vec{k})$ . On note  $z(t)$  son altitude à l'instant  $t \geq 0$  : sa vitesse et son accélération sont alors  $\vec{v}(t) = z'(t)\vec{k}$  et  $\vec{a}(t) = z''(t)\vec{k}$ . De plus, cet objet est soumis aux forces suivantes :

- son poids  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}$  ;
- la force de frottement  $\vec{F} = -f\vec{v}(t) = -fz'(t)\vec{k}$

Le PFD permet d'écrire  $m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F}$  soit  $\boxed{mz''(t) = -fz' - mg.}$

### Exemple : charge d'un condensateur à travers une résistance et une inductance

On considère un circuit électrique constitué d'un générateur  $U$ , d'une résistance  $R$ , d'une inductance  $L$  et d'un condensateur  $C$ . Soient  $q(t)$  la charge du condensateur et  $i(t) = q'(t)$  l'intensité du courant dans le circuit à l'instant  $t$ .

- La tension aux bornes du condensateur est  $U_C = q(t)/C$ .
- La tension aux bornes de la résistance est  $U_R = Ri(t) = Rq'(t)$ .
- La tension aux bornes de l'inductance est  $U_L = Li'(t) = Lq''(t)$ .

La loi des mailles permet d'écrire  $U = U_C + U_R + U_L$  soit  $\boxed{CU = q(t) + RCq'(t) + LCq''(t).}$

**Définition** Soit  $(E)$  une équation différentielle. Une solution de  $(E)$  est dite **solution maximale** s'il n'existe pas d'autre solution de  $(E)$  la prolongeant.

## 2/ Les équations différentielles linéaires du premier ordre

### 2.1) Généralités

#### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux fonctions continues et à valeurs réelles sur un intervalle  $I$ .

- L'équation  $(E) : y' + a y = b$  est appelée **équation différentielle linéaire du premier ordre**.
- Une **solution de  $(E)$**  est une fonction  $f$  dérivable sur  $I$  telle que  $f'(t) + a(t)f(t) = b(t)$  pour tout  $t \in I$ . Son graphe est alors appelé **courbe intégrale de  $(E)$** .

**Définition** L'équation  $(E_0) : y' + ay = 0$  est appelée **équation homogène associée à  $(E)$** .

#### Théorème (structure de l'ensemble des solutions)

Soient  $f_0$  une solution particulière de  $(E)$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$ .  
L'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  est  $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}\}$ .

**Remarque :** ceci nous donne la démarche à suivre pour résoudre l'équation  $(E)$ .

### 2.2) Résolution de l'équation homogène

#### Théorème

Soit  $a$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ .  
Les solutions sur  $I$  de l'équation différentielle homogène  $(E_0) : y' + ay = 0$  sont toutes les fonctions  $g_C : t \mapsto C e^{-A(t)}$  avec  $C \in \mathbb{R}$  une constante.

**Remarque :** lorsque  $a = C^{\text{te}}$ , on a tout simplement  $g_C : t \mapsto C e^{-at}$ .

### 2.3) Résolution de l'équation avec second membre

Maintenant que l'on sait résoudre l'équation homogène  $(E_0) : y' + ay = 0$ , il ne reste plus qu'à trouver une solution particulière de l'équation  $(E) : y' + ay = b$  pour les obtenir toutes.

#### Proposition

On suppose que la fonction  $a$  est constante. Si  $b$  est une constante, un polynôme ou une combinaison de  $\sin$  et de  $\cos$ , l'équation  $(E)$  admet une solution particulière de la même forme.

**Remarque :** on retrouve les mêmes idées qu'en calcul intégral ... ce qui n'est pas surprenant.

**Proposition**

*On suppose que la fonction  $a$  est constante et que  $b : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ , avec  $P$  un polynôme et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'équation (E) admet alors une solution particulière de la forme  $f_0 : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ , où  $Q$  est un polynôme.*

**Remarques :**

- ❶ On commencera par écrire la relation vérifiée par les polynômes  $Q$  et  $Q'$ , ce qui nous permettra de déterminer le degré de  $Q$ .
- ❷ On a un résultat similaire lorsque  $P$  est une combinaison de sin et de cos.

**Proposition (principe de superposition des solutions)**

*Soient  $b_1$  et  $b_2$  deux fonctions définies sur  $I$ . On suppose que :*

- $f_1$  est une solution de  $y' + ay = b_1$  sur  $I$
- $f_2$  est une solution de  $y' + ay = b_2$  sur  $I$

*Alors la fonction  $f_0 = f_1 + f_2$  est une solution de  $y' + ay = b_1 + b_2$  sur  $I$ .*

**Remarque :** grâce à ce principe et aux formules d'Euler, on peut aussi intégrer les sinus et cosinus aux exponentielles en jouant avec des fonctions à valeurs complexes.

**Lorsque  $b$  n'a pas une forme adéquate ou lorsque  $a$  n'est pas constante, les méthodes exposées ci-dessus ne fonctionnent plus. Il faut alors employer les grands moyens.**

**Proposition (méthode de variation de la constante)**

*Rechercher une solution sous la forme  $f_0 : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$  avec  $C$  une fonction dérivable.*

**Remarques :**

- ❶ Ceci nous mène à un « simple » calcul de primitive, qui nous assure de l'existence d'une solution particulière mais ne nous permet pas forcément de calculer son expression.
- ❷ Il faut impérativement penser à utiliser cette méthode lorsque le second membre contient un multiple d'une solution de l'équation homogène (c'est alors très simple).

**2.4) Le problème de Cauchy****Théorème (problème de Cauchy)**

*Soit  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ . Le problème de Cauchy  $\begin{cases} y' + ay = b \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$  admet une unique solution.*

### 3/ Les équations linéaires du second ordre

#### 3.1) Généralités

##### Définition

Soient  $a$  et  $b$  deux réels et  $c$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et à valeurs réelles.

- L'équation  $(E) : y'' + ay' + by = c$  est appelée **équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants**.
- L'équation du second degré  $r^2 + ar + b = 0$  est appelée **équation caractéristique de  $(E)$** .
- Une **solution de  $(E)$**  est une fonction  $f$  deux fois dérivable t.q.  $f''(t) + af'(t) + bf(t) = c(t)$  pour tout  $t \in I$ . Son graphe est alors appelé **courbe intégrale de  $(E)$** .

**Exemples :** la chute verticale avec force de frottement linéaire et la charge d'un condensateur à travers une résistance et une inductance conduisent à de telles équations, en l'occurrence

$$my'' + fy' = -mg \quad \text{et} \quad LCy'' + RCy' + y = CU$$

Nous allons bientôt pouvoir résoudre ces problèmes. Chouette !

**Définition** L'équation  $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$  est appelée **équation homogène associée à  $(E)$** .

##### Théorème

Soient  $f_0$  une solution particulière de  $(E)$  et  $\mathcal{S}$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$ .  
L'ensemble des solutions de l'équation  $(E)$  est alors  $\{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}\}$ .

#### 3.2) Résolution de l'équation homogène

##### Théorème

Soient  $a$  et  $b \in \mathbb{R}$ . On note  $(E_0)$  l'équation homogène  $y'' + ay' + by = 0$  et  $\Delta$  le discriminant de son équation caractéristique  $r^2 + ar + b = 0$ .

- Si  $\Delta > 0$ , l'équation caractéristique admet deux racines réelles distinctes  $r_1$  et  $r_2 \in \mathbb{R}$ .  
Les solutions de  $(E_0)$  sont toutes les fonctions  $g : t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\Delta = 0$ , l'équation caractéristique admet une racine double réelle  $r_0 \in \mathbb{R}$ .  
Les solutions de  $(E_0)$  sont toutes les fonctions  $g : t \mapsto (At + B)e^{r_0 t}$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$ .
- Si  $\Delta < 0$ , l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées  $r = \rho + i\omega$  et  $\bar{r} = \rho - i\omega \in \mathbb{C}$ , avec  $\rho \in \mathbb{R}$  et  $\omega > 0$ . Les solutions de l'équation homogène  $(E_0)$  sont toutes les fonctions  $g : t \mapsto [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] e^{\rho t}$  avec  $A$  et  $B \in \mathbb{R}$ .

### 3.3) Résolution de l'équation avec second membre

Comme pour la résolution des équations linéaires du premier ordre, il suffit maintenant de trouver une solution particulière de l'équation **(E)** :  $y'' + ay' + by = c$  pour les obtenir toutes.

#### Proposition

*Si  $c$  est une constante, un polynôme ou une combinaison de sin et de cos, l'équation **(E)** admet une solution particulière de la même forme.*

**Remarque :** attention aux fautes de signe en dérivant les sin et cos.

#### Proposition

*On suppose que  $c : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$  avec  $P$  un polynôme et  $\alpha \in \mathbb{R}$ . L'équation **(E)** admet alors une solution particulière de la forme  $f_0 : t \mapsto Q(t)e^{\alpha t}$ , où  $Q$  est un polynôme.*

#### Remarques :

- ❶ Même démarche avec des combinaisons de sin et de cos, en faisant très attention aux solutions de l'équation homogène (cf. dernier point).
- ❷ Le principe de superposition demeure inchangé.
- ❸ La méthode de variation de la constante, par contre, se complique un peu et devient la méthode de variation **des** constantes, qui n'est pas à notre programme. Disons juste qu'elle nous assure de l'existence d'une solution particulière puisque  $c$  est continue.

### 3.4) Le problème de Cauchy

#### Théorème (problème de Cauchy)

Soit  $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{R}^2$ . Le **problème de Cauchy** 
$$\begin{cases} y'' + ay' + by = c \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$$
 admet une unique solution sur l'intervalle  $I$ .

# Exercices

## 1/ Équations du premier ordre

### Exercice 1.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a)  $y' + 2y = 8$       (b)  $y' + 2y = 2t^2 - t + 3$       (c)  $y' + 2y = 2 \sin(t) - \cos(t)$   
(d)  $y' - 3y = 2$       (e)  $y' + 2y = e^{2t}$       (f)  $y' + y = e^{3t} + 2 \sin t + t^2$   
(g)  $y' + 3y = e^t$       (h)  $y' - 3y = (t^3 + 1)e^{-t}$       (i)  $y' + y = \sin(t)$

### Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a)  $y' - 5y = e^{5t}$       (b)  $y' - y = (t^2 + 1)e^t$   
(c)  $y' + 2y = \cos t e^{-2t}$       (d)  $y' - y = 2 \sin t + \frac{e^t}{t^2 + 1}$   
(e)  $y' + y = \frac{1}{1 + e^t} + (t + 2)e^t$       (f)  $y' - y = \frac{e^t}{\sqrt{1 - t^2}}$

### Exercice 3.

Trouver toutes les applications  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f'(x)f(-x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
On pourra considérer la fonction  $g : x \mapsto f(x)f(-x)$  et calculer  $g'(x)$ .

### Exercice 4.

On cherche à déterminer toutes les fonctions  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$

- 1) Quelles sont les valeurs possibles pour  $f(0)$  ?
- 2) Dériver la relation proposée par rapport à  $x$  en  $x = 0$ .
- 3) Résoudre alors l'équation différentielle obtenue et conclure.

### Exercice 5.

En posant  $z = 1/y$ , résoudre l'équation différentielle  $y' = y(1 - y)$ .

### Exercice 6.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- (a)  $y' + ty = t^3$       (b)  $y' + 3t^2y = t^2 + e^{-t^3}$       (c)  $y' + (\tan t)y = \sin t$   
(d)  $ty' - y = t^2e^t$       (e)  $(1 - t^2)y' - 2ty = 1$       (f)  $(1 + t^2)y' = ty + \sqrt{1 + t^2}$

**Exercice 7.**

Même exercice, en recherchant en outre les solutions maximales :

$$(a) \quad ty' + y = 1 \quad (b) \quad ty' - 2y = t^3 \quad (c) \quad (1-t)y' - y = t \quad (d) \quad t^2y' - y = 0$$

**Exercice 8.**

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $t^n y' - \alpha y = 0$ , où  $(n, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+^*$ .

Déterminer de plus les solutions maximales de cette équation.

**Exercice 9.**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) \quad y' + y \cos t = \sin t \cos t \quad (b) \quad y' \cos t + y \sin t = e^{-t} \cos^2 t \quad (c) \quad y' \tan t + y = \sin t$$

**Exercice 10.**

Résoudre, sur son domaine de définition, l'équation  $2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$ .

Déterminer les solutions maximales de cette équation.

**Exercice 11.**

On considère l'équation différentielle  $ty' + (1-t)y = \frac{te^t}{t^2 + 1}$ .

La résoudre sur  $]0; +\infty[$ . Existe-t-il une solution qui prend la valeur 0 en  $t = 1$  ?

**Exercice 12.**

Déterminer la solution de l'équation  $ty' - y = t^3$  sur  $]0; +\infty[$  telle que  $y(1) = 0$ .

## 2/ Équations du second ordre

**Exercice 13.** Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) \quad y'' - 2y' + y = 0 \quad (b) \quad y'' - 5y' + 6y = 0 \quad (c) \quad y'' - 3y' = 0 \\ (d) \quad y'' - 4y' + 3y = t^2 - 2t \quad (e) \quad y'' + 4y' = t^2 + 7t - 2 \quad (f) \quad y'' + 2y' - 8y = e^{3t}$$

**Exercice 14.**

Déterminer l'ensemble des couples  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tels que toute solution de l'équation différentielle  $y'' + ay' + by = 0$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  soit bornée.

**Exercice 15.**

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$(a) \quad y'' + 4y' + 4y = (2t^2 + 1)e^{2t} \quad (b) \quad y'' + 4y' + 4y = (2t^2 + 1)e^{-2t} \\ (c) \quad y'' - 2y' + y = e^t - e^{-t} \quad (d) \quad y'' + 2y' + 2y = 2e^{-t} \cos(t) \\ (e) \quad y'' + 4y = t \cos^2(t) \quad (f) \quad y'' - 2y' + 2y = 2 \sin(t)$$

**Exercice 16.**

Soit  $m \in \mathbb{R}$  fixé. Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & y'' - 2y' + my = \cos(t) \\ \text{(b)} & y'' + 4y = \sin(mt) \\ \text{(c)} & my'' - (1 + m^2)y' + my = te^t \\ \text{(d)} & y'' + my = \cos(t)e^t \end{array}$$

*C'est un exercice assez long, réservé aux gens très motivés ... car il faut falloir distinguer à chaque fois différents cas selon les valeurs de  $m$ . D'ailleurs j'ai eu la flemme de rédiger le corrigé ...*

**Exercice 17.**

- 1) Résoudre sur  $]0; +\infty[$  l'équation **(E)** :  $y' - y = \frac{e^t}{2\sqrt{t}}$
- 2) Déterminer la solution  $f$  de **(E)** pour laquelle  $f(1) = e$ .
- 3) Montrer que  $f$  est solution sur  $]0; +\infty[$  de l'équation **(F)** :  $y'' - 2y' + y = \frac{-e^t}{4t\sqrt{t}}$ .
- 4) En déduire toutes les solutions de **(F)** sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 18.**

- 1) Montrer que pour tout  $m \in ]0; 2[$ , l'équation différentielle  $y'' + (1 - 2m)y' - 2my = e^{2t}$  admet une unique solution  $y_m$  telle que  $y_m(0) = y'_m(0) = 0$ .
- 2) Établir que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\lim_{m \rightarrow 1} y_m(x) = y_1(x)$

**Exercice 19.**

En posant  $y(t) = tz(t)$ , résoudre l'équation  $t^2y'' - 2ty' + (2 - t^2)y = 0$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 20.**

Résoudre les équations suivantes grâce aux changements de variables  $u(t)$  proposés.

*Méthode : dans chaque cas, on cherche la solution  $y$  sous la forme  $y(t) = z(u(t))$ .*

- 1)  $y'' + y' \tan(t) - y \cos^2(t) = 0$  en posant  $u = \sin t$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ .
- 2)  $ty'' + (4t^2 - 1)y' + 4t^3y = 8t^3$  en posant  $u = t^2$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 3)  $y'' + y' + e^{-2t}y = e^{-4t} + 2e^{-3t} - 3e^{-2t}$  en posant  $u = e^{-t}$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 4)  $t^2y'' + 3ty' + y = 1 + t^2$  en posant  $u = \ln(t)$  sur  $]0; +\infty[$ .

**Exercice 21.**

Résoudre l'équation  $(1 + x)^2y'' + (1 + x)y' = 2$  sur les intervalles  $]-\infty; -1[$  et  $]-1; +\infty[$ .