XI – Autour de la récurrence

1/ Les entiers naturels

1.1) Définition et propriété fondamentale

Définition

On appelle ***ensemble des entiers naturels*** *et l'on note* $\mathbb{N}$ *l'ensemble des entiers positifs ou nul.*

Remarque : l'ensemble $\mathbb{N}$ admet 0 pour plus petit élément. Par contre, il n'admet pas de plus grand élément puisque $M+1 \in \mathbb{N}$ pour tout $M \in \mathbb{N}$.

Proposition (fondamentale)

- *Toute partie non vide de* $\mathbb{N}$ *admet un plus petit élément.*
- *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{N}$ *admet un plus grand élément.*

Remarque : ces propriétés sont fausses dans $\mathbb{R}$ ... penser par exemple à l'intervalle $]\,0\,;1\,[$.

Notation : pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leqslant n$, on définit les intervalles d'entiers

$$[\![\, m\,;n \,]\!] = \left\{p \in \mathbb{N} \middle/ m \leqslant p \leqslant n\right\} \qquad \text{et} \qquad [\![\, n\,;+\infty \,[\![= \left\{p \in \mathbb{N} \middle/ p \geqslant n\right\}$$

Ce sont en fait les intersections de $\mathbb{N}$ et des intervalles « normaux » $[\,m\,;n\,]$ et $[\,n\,;+\infty\,[$.

1.2) Le principe de récurrence

Définition *On appelle* ***prédicat sur*** $\mathbb{N}$ *une proposition portant sur un entier naturel.*

Remarque : on parlera du prédicat $\mathscr{P}$ ou bien, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, de la proposition $\mathscr{P}(n)$.

Théorème (principe de récurrence)

Soit $\mathscr{P}$ *un prédicat portant sur* $n \in \mathbb{N}$ *tel que :*

1) *la proposition* $\mathscr{P}(0)$ *est vraie ;*
2) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, si la proposition* $\mathscr{P}(n)$ *est vraie, alors la proposition* $\mathscr{P}(n+1)$ *est vraie.*

On en déduit que la proposition $\mathscr{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on procèdera de manière analogue avec une proposition sur les entiers $n \geqslant n_0$, où $n_0 \in \mathbb{N}$ est fixé. Il faudra faire attention dans ce cas à l'initialisation.

Un raisonnement par récurrence commence par la définition du prédicat $\mathscr{P}$ en écrivant

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } \mathscr{P}(n) : \text{« ... »}}$$

et comporte trois étapes qui correspondent à l'application précise du théorème.

❶ l'**Initialisation** : on vérifie que la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

❷ l'**Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}$ fixé ; on suppose que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie. On prouve alors que la proposition $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

❸ la **Conclusion** : on déduit du principe de récurrence que la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Attention, **il ne faut surtout pas mettre de** $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$ **dans la définition de $\mathscr{P}(n)$ ou lors de l'hérédité**, ce sont les deux erreurs archi-classiques. Dans le premier cas, il y a une ambiguïté de formulation (le n est en même temps fixé et variable) et la propriété $\mathscr{P}(0)$ est équivalente au résultat recherché. Dans le second cas, on admet ce résultat en début d'hérédité !

Théorème (récurrence double)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

1) les proposition $\mathscr{P}(0)$ et $\mathscr{P}(1)$ sont vraies ;

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(n)$ et $\mathscr{P}(n+1)$ sont vraies, alors $\mathscr{P}(n+2)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Théorème (récurrence forte)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $n \in \mathbb{N}$ tel que :

1) la proposition $\mathscr{P}(0)$ est vraie ;

2) pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in [\![0 ; n]\!]$, alors $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

Alors la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : cette forme de récurrence est utile quand le calcul du terme d'une suite récurrente fait intervenir plusieurs termes antérieurs.

2/ Les suites récurrentes

2.1) Généralités

Théorème (admis)

Soient E un ensemble non vide, $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$ une application et $a \in \mathrm{E}$. Il existe une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

*On parle alors de suite **définie par récurrence** ou de **suite récurrente**.*

Proposition (généralisation)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments d'un ensemble E *est parfaitement définie par la donnée de :*

1) une application $f : \mathbb{N}\times \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{E}$

2) un élément $u_0 \in \mathrm{E}$

3) une relation de récurrence $u_{n+1} = f(n, u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : on peut déterminer successivement les termes d'une telle suite. Par contre, pour établir des propriétés plus générales vérifiées par ces suites (suggérées par le calcul des premiers termes ou la représentation graphique), il faut utiliser le principe de récurrence.

2. 2) Suites arithmétiques

Définition *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique de raison r** si* $u_{n+1} = u_n + r$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors :

- $u_n = u_p + (n-p)\,r$ *pour tous* $p \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{N}$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\times\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

Remarque : le facteur $n+1$ dans la dernière formule est le nombre de termes de la somme.

2. 3) Suites géométriques

Définition *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique de raison q** si* $u_{n+1} = q\,u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Alors :

- $u_n = q^{n-p}\,u_p$ *pour tous* $p \in \mathbb{N}$ *et* $n \in \mathbb{N}$.
- *Si $q \neq 1$, alors* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = u_0 \times \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : dans la dernière formule, le facteur u_0 est le premier terme de la somme et l'exposant $n+1$ est le nombre de termes de la somme.

2.4) Suites arithmético-géométriques

Définition *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmético-géométrique** s'il existe un couple $(q, r) \in \mathbb{R}^2$ tel que $q \neq 1$, $r \neq 0$ et $u_{n+1} = q\,u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Technique d'étude d'une suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

1) Calculer la solution $a \in \mathbb{R}$ de l'équation $x = qx + r$.
2) Vérifier que la suite de terme général $v_n = u_n - a$ est géométrique de raison q.
3) En déduire l'expression de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2.5) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition
- *Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *L'équation $x^2 = ax + b$ est appelée **équation caractéristique** de la suite.*

Théorème

*Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2. On note **(E)** son équation caractéristique.*
- *Si **(E)** admet deux racines réelles distinctes q_1 et q_2, alors il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n = \mathrm{A}\,{q_1}^n + \mathrm{B}\,{q_2}^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Si **(E)** admet une racine double q_0, il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n = (\mathrm{A}n + \mathrm{B})\,{q_0}^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
- *Si **(E)** admet deux racines complexes conjuguées distinctes $q = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $\overline{q} = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, alors il existe deux réels A et B tels que $\boxed{u_n = \rho^n\,(\mathrm{A}\,\cos(n\theta) + \mathrm{B}\,\sin(n\theta))}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarque : on détermine les constantes A et B grâce aux valeurs de u_0 et de u_1.

Exercices

Exercice 1.
Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1) $1 + 2 + 4 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $2^{3n} - 1$ est divisible par 7 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $n^2 \leqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 4$.

Exercice 2.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $u_n < \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_{n+2} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.
Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante.
Montrer que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $u_{n+1} = \sqrt{15 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que si $u_0 \in [\,0\,;5\,]$, alors $0 \leqslant u_n \leqslant 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Montrer que si $u_0 \in [\,4\,;10\,]$, alors $4 \leqslant u_n \leqslant 10$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $2 \leqslant u_n \leqslant 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6.
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $0 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 7.
Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et $u_{n+2} = 3\,u_{n+1} - 2\,u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 8. Déterminer la dérivée n-ième de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{2x+3}{x+2}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 9.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r ; on pose $v_n = 2^{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Calculer $\mathrm{S}_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ et $\mathrm{P}_n = v_0 \times v_1 \times \cdots \times v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10. Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

1) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = -\frac{u_n}{2} + 12$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = u_n\sqrt{2} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $u_0 = 7$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{7} + \frac{6}{7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{4} + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Déterminer une suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la même relation de récurrence.
2) On pose $v_n = u_n - w_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
3) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 12. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On pose $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 13.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = 7\,u_{n+1} + 8\,u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1) On pose $s_n = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique. Déterminer ensuite son expression.
2) Procéder de même avec la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - 8u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) En déduire l'expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14. Déterminer les expressions des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

1) $u_0 = -1$, $u_1 = 2$ et $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.
2) $u_0 = 4$, $u_1 = 5$ et $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
3) $u_0 = 1$, $u_1 = \sqrt{3} - 1/2$ et $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

Exercice 15.
On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 1/3$, $u_{n+1} = u_n + 3v_n$ et $v_{n+1} = 2u_n + 2v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_{n+1}, u_n et v_n.
2) En déduire que $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 4u_n$.
3) Exprimer u_n puis v_n en fonction de n.