

XII – Ensembles finis et dénombrement

1/ Le symbole somme

1.1) Définition

Définition Soit $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$. On note $x_p + x_{p+1} + \cdots + x_n = \sum_{i=p}^n x_i = \sum_{p \leq i \leq n} x_i$.

Proposition

Si $p > n$, la somme $\sum_{i=p}^n x_i$ ne contient pas de terme. Par convention, elle est **nulle**.

1.2) Règles de calculs

Proposition (linéarité de la somme)

Pour tous λ et $\mu \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i=1}^n x_i + \mu \sum_{i=1}^n y_i$.

Proposition (découpage de somme)

Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^n x_i$.

1.3) Changements d'indice

Proposition (changements incontournables)

- Changement d'indice $k = i + p$: pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=1+p}^{n+p} x_{k-p}$
- Changement d'indice $k = p - i$: pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{k=p-n}^{p-1} x_{p-k}$

1.4) Sommes télescopiques

Proposition

$$\text{Si } n \geq 1, \text{ on a } \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) = x_{n+1} - x_1.$$

Proposition (sommes classiques)

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Proposition (sommes géométriques)

Pour tous $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $b^n - a^n = (b - a) \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k}$

1.5) Sommes doubles

Définition La somme de tous les éléments du tableau à n lignes et p colonnes suivant

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

est notée $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_{ij}$ ou encore $\sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij}.$

Proposition (intersion de sommes)

Quand les indices d'une double somme sont indépendants, on peut intervertir les deux sommes.

Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n a_{ij} = \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} a_{ij}$$

Proposition (sommes triangles)

On a

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

et

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j a_{ij}$$

1.6) Le symbole produit

Définition Pour $p \leq n$, on note $x_p \times \cdots \times x_n = \prod_{i=p}^n x_i$. On convient qu'un produit vide vaut 1.

Proposition (règles de calcul)

$$\text{Pour tous } \lambda \text{ et } \mu, \text{ on a } \prod_{i=1}^n (x_i^\lambda y_i^\mu) = \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^\lambda \times \left(\prod_{i=1}^n y_i \right)^\mu$$

Proposition (produits télescopiques)

$$\text{Si } n \geq 1 \text{ et } x_i \neq 0 \text{ pour tout } i, \text{ on a } \prod_{i=1}^n \frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{x_{n+1}}{x_1}.$$

2/ Les ensembles finis

2.1) Cardinal d'un ensemble fini

Définition Le nombre d'éléments d'un ensemble fini E s'appelle **cardinal de E** et se note $\text{card}(E)$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis.

- Il existe une injection de E dans F si, et seulement si, $\text{card}(E) \leq \text{card}(F)$.
- Il existe une surjection de E sur F si, et seulement si, $\text{card}(E) \geq \text{card}(F)$.
- Il existe une bijection entre E et F si, et seulement si, $\text{card}(E) = \text{card}(F)$.

2.2) Opérations sur les ensembles finis

Proposition

Soit E un ensemble fini : $\text{card}(E) = n \in \mathbb{N} \iff$ il existe une bijection entre E et $\llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Remarque : cette bijection est simplement la numérotation des éléments de E .

Proposition

Soient E un ensemble fini et A une partie de E . Alors A est finie et $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$.
Si en outre $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, il en découle que $A = E$.

Théorème

Soient E un ensemble fini et A, B deux parties de E .

- $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$.
- $\text{card}(\overline{A}) = \text{card}(E) - \text{card}(A)$.

Théorème

Soient E et F deux ensembles finis. Alors $E \times F$ est fini et $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

3/ Le dénombrement

3.1) Listes d'éléments d'un ensemble fini

Définition Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble fini. Une **p -liste de E** est une suite **ordonnée** de p éléments de E , notée $(u_1, u_2, \dots, u_p)$ avec $u_i \in E$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Proposition (p -listes d'un ensemble de cardinal n)

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Le nombre de p -listes de E est n^p .

p -listes $\iff$ tirages **avec ordre et avec remise** de p éléments parmi n

Proposition

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$ un entier.

Le nombre de p -listes d'éléments **distincts** de E est $\frac{n!}{(n-p)!}$

p -listes d'éléments distincts $\iff$ tirages **avec ordre et sans remise** de p éléments parmi n

3.2) Les permutations

Définition Soit E un ensemble fini. Une **permutation de E** est une bijection de E dans E .

Remarque : une permutation est un changement de l'ordre d'énumération ... d'où le nom.

Proposition (nombre de permutations)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de permutations de E est $n!$

3.3) Les combinaisons

Définition Soient E un ensemble fini et $p \in \mathbb{N}$.

- On appelle **combinaison de p éléments de E** toute partie de E de cardinal p .
- Pour un ensemble E de cardinal $n \in \mathbb{N}$, le nombre de ces combinaisons se note $\binom{n}{p}$.

combinaisons de p éléments $\iff$ tirages **sans ordre ni remise** de p éléments parmi n

Théorème

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on a $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Proposition

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$, on a :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Théorème (relation de Pascal)

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on a $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$.

Triangle de Pascal : à l'aide de cette relation, on construit les valeurs successives des $\binom{n}{p}$.

Théorème (formule du binôme de Newton)

Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$.

Corollaire

Soit E un ensemble à $n \in \mathbb{N}$ éléments. Le nombre de parties de E est 2^n .

Exercices

Exercice 1.

Soient $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer par récurrence l'égalité de Bernoulli

$$x^{n+1} - y^{n+1} = (x - y) \sum_{k=0}^n x^{n-k} y^k$$

La retrouver ensuite à l'aide d'une somme télescopique.

Exercice 2.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $C_n = \sum_{k=1}^n k^3$, $D_n = \sum_{k=1}^n (k+1)^3$ et $B_n = \sum_{k=1}^n k^2$.

- 1) Exprimer D_n en fonction de C_n .
- 2) En partant du développement de $(k+1)^3$, établir une relation entre D_n , C_n et B_n .
- 3) En déduire B_n .

Exercice 3.

Montrer que $\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin \frac{k\pi}{2n}\right)$ pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4.

- 1) Déterminer trois réels a , b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$
- 2) En déduire $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 5.

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x) = \sum_{k=0}^n x^k$ puis $g(x) = \sum_{k=0}^n k x^k$.

Indication : on pourra exprimer $g(x)$ à l'aide de $f'(x)$.

Exercice 6.

En lançant un dé trois fois, combien peut-on former de nombres à trois chiffres :

- (a) différents ? (b) avec trois chiffres distincts ? (c) avec deux chiffres distincts ?

Exercice 7.

Un octet est une liste de huit chiffres pris parmi 0 ou 1. Combien y a-t-il d'octets :

- (a) différents ? (b) contenant trois 1 ? (c) commençant et finissant par 1 ?

Exercice 8.

- 1) Dénombrer les entiers naturels de trois chiffres ayant deux chiffres identiques.
- 2) Montrer que parmi 677 personnes, au moins deux ont les mêmes initiales.

Exercice 9. Soit $n \geq 2$ un entier naturel.

- 1) Quel est le nombre de diagonales d'un polygone convexe à n côtés ?
- 2) Quel est le nombre de partitions en deux parties d'un ensemble à n éléments ?
- 3) Combien y a-t-il d'entiers naturels $N < 10^n$ dont la somme des chiffres vaut 3 ?
- 4) Soient E un ensemble fini et $A \subset E$ tels que $\text{card}(E) = n$ et $\text{card}(A) = p \leq n$.
Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?

Exercice 10. Soient m et n deux entiers non nuls.

- 1) Déterminer le nombre de n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$.
Indication : se ramener au dénombrement de listes d'entiers distincts en considérant $y_i = \sum_{k=1}^i x_k$.
- 2) Déterminer le nombre de n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = m$.

Exercice 11.

Combien existe-t-il d'anagrammes du mot abracadabra ?

Exercice 12. Montrer que $(k+1) \binom{n+1}{k+1} = (n+1) \binom{n}{k}$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.**Exercice 13.**

On tire n boules dans une urne qui contient n boules blanches et n boules rouges.

- 1) Combien y a-t-il de tirages contenant k boules rouges et $(n-k)$ boules blanches ?
- 2) En déduire que $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 14. Développer $(1-x)^6$, $(x-2)^5$ et $(2x+1)^3$.**Exercice 15.** Développer $(\cos x + i \sin x)^4$ puis exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.**Exercice 16.**

Calculer les sommes suivantes :

$$(1) \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos(px) \quad (2) \sum_{p=0}^n \frac{1}{p+1} \binom{n}{p} \quad (3) \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} \text{ et } \sum_{0 \leq k \leq l \leq n} \binom{l}{k} 3^k$$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^n \binom{i}{j}$.