XVI – Les polynômes réels

1/ Les fonctions polynomiales

1.1) Définitions

Définition *On appelle **fonction polynomiale** ou **polynôme** toute fonction réelle de la forme* $\mathrm{P} : x \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ *, avec* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels nulle à partir d'un certain rang.*

Remarques :

❶ Un tel polynôme se note formellement $\mathrm{P} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, \mathrm{X}^n$ à l'aide d'une **indéterminée** X.

❷ Les nombres (a_n) sont appelés les **coefficients** du polynôme.

❸ Le polynôme dont tous les coefficients sont nuls est appelé **polynôme nul** et noté 0.

❹ L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ et d'indéterminée X se note $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Proposition

L'écriture d'un polynôme est unique. Par conséquent :
- *Un polynôme est nul si, et seulement si, tous ses coefficients sont nuls.*
- *Deux polynômes sont égaux si, et seulement si, tous leurs coefficients sont égaux.*

Définition *On associe à tout polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ *son **degré** noté* $\deg(\mathrm{P})$ *et défini par*

$$\deg(\mathrm{P}) = \begin{cases} -\infty & si \quad \mathrm{P} = 0 \\ n & si \quad \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \ \ avec \ \ a_n \neq 0 \end{cases}$$

Remarques :
- Si $\mathrm{P} \neq 0$, le coefficient $a_{\deg(\mathrm{P})}$ s'appelle le **coefficient dominant** du polynôme P.
- Un polynôme de coefficient dominant égal à 1 est appelé **polynôme unitaire**.

Définition *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *On note* $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}] = \left\{\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}] \big/ \deg(\mathrm{P}) \leqslant n\right\}$.

1.2) Opérations sur les polynômes

Théorème

Les sommes, produits, composées et dérivées de polynômes sont encore des polynômes.

Proposition

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, P *et* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[X]$. *Alors :*

- $\deg(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \max\left\{\deg(\mathrm{P}); \deg(\mathrm{Q})\right\}$ *avec égalité si* $\deg(\mathrm{P}) \neq \deg(\mathrm{Q})$.
- $\deg(\mathrm{P}\,\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$ *et* $\deg(\lambda\,\mathrm{P}) = \deg(\mathrm{P})$ *si* $\lambda \neq 0$.

Proposition

Soient P *et* Q *deux polynômes tels que* $\mathrm{P} \neq 0$, $\mathrm{Q} \neq 0$ *et* $\mathrm{P} \circ \mathrm{Q} \neq 0$.
On a $\boxed{\deg(\mathrm{P} \circ \mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P}) \times \deg(\mathrm{Q}).}$

Proposition

Soit $\mathrm{P}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{X}^n \in \mathbb{R}[X]$. *Son polynôme dérivé est* $\boxed{\mathrm{P}'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, a_{n+1} \mathrm{X}^n.}$

Proposition

Soit P *un polynôme. Si* P *est constant,* $\mathrm{P}' = 0$. *Sinon,* $\boxed{\deg(\mathrm{P}') = \deg(\mathrm{P}) - 1.}$
En particulier, $\mathrm{P}^{(m)} = 0$ *pour tout entier* $m > \deg(\mathrm{P})$.

2/ Racines d'un polynôme

2.1) Définitions

Définition *Un réel* α *est une* ***racine*** *du polynôme* P *si* $\mathrm{P}(\alpha) = 0$.
On dit que c'est une solution de ***l'équation algébrique*** $\mathrm{P}(x) = 0$ *d'inconnue* $x \in \mathbb{R}$.

Proposition

Tout polynôme P *de degré* ***impair*** *admet au moins une racine réelle.*

Théorème (factorisation)

Un réel α *est racine d'un polynôme* P *si, et seulement si,* P *se factorise par* $(\mathrm{X} - \alpha)$.

2. 2) Nombre de racines

Proposition

Un polynôme de degré n possède au plus n racines.

Corollaire

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui possède au moins $n+1$ racines est le polynôme nul.

Proposition

*Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ **possédant exactement n racines** s'écrit sous la forme*

$$\boxed{P = a_n\,(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\,\dots\,(X-\alpha_n)}$$

2. 3) Racines multiples

Définition *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On dit que $\boldsymbol{\alpha \in \mathbb{R}}$ **est racine de P de multiplicité m** lorsque l'une des propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :*

(i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ *et* $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$

(ii) P *est divisible par* $(X-\alpha)^m$ *mais pas par* $(X-\alpha)^{m+1}$.

Proposition

*Un polynôme P de degré $n \in \mathbb{N}^*$ possédant exactement n racines **comptées avec leurs ordres de multiplicité** s'écrit sous la forme*

$$\boxed{P = a_n\,(X-\alpha_1)^{m_1}(X-\alpha_2)^{m_2}\,\dots\,(X-\alpha_r)^{m_r}}$$

où $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} m_i = n$.

Exercices

1/ L'ensemble $\mathbb{R}[X]$

Exercice 1.
Montrer *par calcul direct* que $(X^3 + X^2 + X + 1)\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k X^k = X^{2n+3} + X^{2n+1} + X^2 + 1$.

Exercice 2.
En utilisant l'identité $(1 - X^2)^{2n} = (1 + X)^{2n}(1 - X)^{2n}$ et en identifiant les coefficients de X^{2n}, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \binom{2n}{k}^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$.

Exercice 3. Déterminer tous les polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P^2 = X Q^2$.

Exercice 4. Calculer le degré de $(X + 1)^n - (1 - X)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Déterminer le degré de $P(X + 1) - P(X)$ en fonction de celui de P.

Exercice 6.
Soient P un polynôme de degré $d \in \mathbb{N}$ et $Q = d\,P - X\,P'$. Montrer que $\deg(Q) \leqslant d - 1$.

Exercice 7.
Soient P et $Q \in \mathbb{R}[X]$. Démontrer que $(PQ)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8.
Grâce à l'algorithme de Horner, calculer $P(\alpha)$ pour

1) $P = X^3 - 3X - 1$ et $\alpha = 4$.
2) $P = X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 6X - 12$ et $\alpha = 5$.
3) $P = X^5 - 2X^4 + 5X^3 - 3X + 2$ et $\alpha = 2$.

Exercice 9.
Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est-il stable par produit ?

Exercice 10. Effectuer la division euclidienne de :

1) $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ par $X^2 + 1$.
2) $2X^4 + 5X^3 - 3X + 2$ par $X^3 - 3X + 1$.
3) $6X^5 - X^4 + 2X^3 - 7X + 1$ par $X^2 - 2$.

2/ Racines d'un polynôme

Exercice 11.
Quel est l'ordre de multiplicité de 2 comme racine de $P = X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$?

Exercice 12.
En s'aidant de racines évidentes, factoriser les polynômes suivants :

(a) $3X^3 + X^2 - 8X + 4$ (b) $X^3 + 6X^2 + 9X + 4$ (c) $-3X^3 + 11X^2 + 24X - 20$

Exercice 13.
Déterminer les racines du polynôme $X^5 - 5X^4 + 7X^3 - 2X^2 + 4X - 8$.

Indication : il y a une racine « évidente » multiple.

Exercice 14.
Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ une racine de P d'ordre $r \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que α est une racine d'ordre $(r - 1)$ de P'.

Exercice 15.
Déterminer $a \in \mathbb{R}$ pour que -1 soit racine double du polynôme $X^5 + aX^2 + aX + 1$.

Exercice 16.
Montrer que le polynôme $P = 36X^4 + 12X^3 - 11X^2 - 2X + 1$ a deux racines doubles.

Indication : on pourra chercher à écrire P comme le développement d'un carré.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que $X^{2n} - 1$ se factorise par $X^2 - 1$.
2) Montrer que $(X + 1)^n - nX - 1$ se factorise par X^2.

Exercice 18.
En effectuant le changement de variables $Z = z + 1/z$, déterminer les racines de l'équation algébrique $2z^4 - 5z^3 + 4z^2 - 5z + 2 = 0$.