XVII – Les développements limités

1/ Définition et premières propriétés

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0, sur un intervalle I

1.1) Développements limités en 0

Définition *On dit que f admet **un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0** s'il existe des réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$\forall x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

*On parlera en abrégé de **DL_n en 0**. Cette expression sert aussi à désigner la somme.*

Proposition (unicité du DL)

Si f admet un DL_n en 0, celui-ci est unique.

Corollaire (troncature de DL)

On suppose que la fonction f admet $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ pour DL_n en 0.

Pour tout $p \in [\![0 ; n]\!]$, elle admet alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ pour DL_p en 0

Corollaire (DL et parité)

On suppose que f admet un DL_n en 0.

- *Si la fonction f est paire, alors son DL_n est pair.*
- *Si la fonction f est impaire, alors son DL_n est impair.*

1.2) Développements limités usuels

Soit $n \in \mathbb{N}$. La formule de Taylor-Young nous assure que si f est n fois dérivable et de dérivée n-ième continue sur I, alors

$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{I} \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^n)}$$

C'est le cas des fonctions usuelles, pour lesquelles on obtient les DL_n suivants en 0 :

- $\mathrm{e}^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^n)$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n\, x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^{2n})$
- $\sin x = \dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^n)$.
- $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n\, x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^n)$.
- $(1+x)^\alpha = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}\, x + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)}{2!}\, x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha\,(\alpha-1)\,\ldots\,(\alpha+1-n)}{n!}\, x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\,(x^n)$.

1.3) Développements limités en a et en l'infini

Si l'on veut étudier une fonction f au voisinage d'un réel a, on pose $\boldsymbol{h = x - a}$ et l'on établit un DL en 0 de la fonction $g : h \longmapsto f(a+h)$. Ceci nous fournit un développement de f en $x - a$, que l'on appelle **DL en $\boldsymbol{a}$**.

Si l'on veut étudier une fonction f au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, on pose $\boldsymbol{h = 1/x}$ et l'on établit un DL en 0 de la fonction $g : h \longmapsto f(1/h)$. Ceci nous fournit un développement de f en $1/x$, que l'on appelle **DL en l'infini**.

2/ Opérations sur les DL

L'utilisation de la formule de Taylor-Young n'est pas la meilleure méthode pour obtenir des DL, car les dérivées n-ièmes peuvent s'avérer rapidement difficiles à calculer. Il faudra plutôt utiliser et combiner les DL des fonctions usuelles.

Proposition (manipulation des fonctions négligeables)

Soient n et $p \in \mathbb{N}$. Alors :

- $\underset{x\to 0}{o}(x^p) + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *si* $p \geqslant n$ *et* $x^p + \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *si* $p > n$.
- $\underset{x\to 0}{o}(x^p) \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+p})$ *et* $x^p \times \underset{x\to 0}{o}(x^n) = \underset{x\to 0}{o}(x^{n+p})$.

Proposition (opérations de base)

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de 0. *On suppose qu'il existe* P *et* $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *tels que* $f(x) = \mathrm{P}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$ *et* $g(x) = \mathrm{Q}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$. *Alors :*

- $(f+g)(x) = (\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$.
- $(fg)(x) = \mathrm{R}(x) + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, *où* $\mathrm{R} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ *est le polynôme obtenu en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit* PQ.

Développement limité d'une composée

Pour calculer le DL_n en 0 de $f \circ g$ **dans le cas où $g(0) = 0$**, il suffit de remplacer f et g par leurs DL_n en 0 **sans oublier les $o\,(x^n)$** et d'utiliser les règles de calcul vues précédemment. Cela revient à injecter le DL_n de g dans celui de f. Attention toutefois à la valeur de $g(0)$.

Développement limité d'un quotient

Pour calculer le DL_n en 0 du quotient de deux fonctions, il suffit de se ramener à une expression de la forme $\dfrac{u(x)}{1-v(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to 0} v(x) = 0$. Les DL_n en 0 de u et v permettent alors de conclure par composition et produit.

Proposition (intégration de DL)

Si une fonction continue f admet en un DL_n de la forme $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$, toute primitive F de f admet un DL_{n+1} en 0 de la forme $\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$.

Remarque : attention, on peut intégrer terme à terme les DL mais **surtout pas les dériver !**
Ceci nous permet d'établir de nouveaux DL usuels en 0 :

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$

3/ Applications des développements limités

3.1) Étude locale d'une fonction

Un DL à l'ordre n d'une fonction f en a nous permet :

- de calculer $\lim_{x\to a} f(x)$
- de trouver un équivalent simple de f en a
- de trouver la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a ainsi que sa position (si $n \geqslant 2$).

3.2) Étude asymptotique d'une fonction

Un DL en l'infini d'une fonction f nous permet encore d'étudier des limites et de trouver des équivalents simples en $+\infty$ ou en $-\infty$. De plus, il nous donne les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ ainsi que leurs positions relatives.

Exercices

1/ Développements en 0

Exercice 1. Rechercher les développements limités à l'ordre 3 en 0 de :

(a) $\sqrt{1+x/2}$ (b) $\dfrac{1}{3+x}$ (c) $\dfrac{\sin x}{x}$ (d) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$

(e) $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ (f) $\mathrm{e}^x \ln(1-x)$ (g) 3^x (h) $\mathrm{e}^{\cos x}$

(i) $\mathrm{e}^{\tan x}$ (j) $\dfrac{\mathrm{e}^{x/1+x}}{(1+x)^2}$ (k) $\ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)$ (l) $(1+\sin x)^{1/x}$

Exercice 2. Même exercice, sauf qu'on pousse à l'ordre 5 :

(a) $\sin(x)\cos(2x)$ (b) $(1-\cos x)\ln(1+x)$ (c) $\ln(\cos x)$ (d) $\dfrac{x}{\sin x}$

(e) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ (f) $\cos x^{\sin x}$ (g) $\mathrm{e}^{\sin x}$ (h) $\tan x$

Exercice 3. Trouver des équivalents en 0 de :

(a) $x\,(1+\cos(x)) - 2\tan x$ (b) $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\sin(x)^{\sin(2x)}$

Exercice 4. Calculer les limites en 0 des expressions suivantes :

(a) $\dfrac{2^x-3^x}{x}$ (b) $\left[\ln(1+x)\right]^x$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^x-\sqrt{1-x}}{x}$

(d) $(\tan x)^{\sin x}$ (e) $\dfrac{1-x\sin x-\cos x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$ (f) $\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}$

Exercice 5. Étudier les tangentes au point d'abscisse 0 des courbes des fonctions

(a) $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}$ (b) $g : x \longmapsto \ln(x^2+2x+2)$

(c) $h : x \longmapsto x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)$ (d) $i : x \longmapsto x\exp\left(\dfrac{2x}{x^2-1}\right)$

Exercice 6. Étudier la continuité et la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes

(a) $f : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$ (b) $g : x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x\neq 0 \end{cases}$

2/ Développements en l'infini

Exercice 7. Rechercher les développements limités à l'ordre 4 en $+\infty$ de :

(a) $\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}$ (b) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ (c) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$

(d) $\dfrac{x^2+2}{x^2+x}$ (e) $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ (f) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\ln x$

Exercice 8. Calculer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

(a) $x\left(\mathrm{e}^{1/x}-1\right)$ (b) $\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x}$ (c) $x\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$ (d) $\left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$

Exercice 9. Trouver des équivalents en $+\infty$ de :

(a) $x^{\frac{1}{x}}$ (b) $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{x^2+x}}$

Exercice 10. Étudier les branches infinies des courbes des fonctions suivantes :

(a) $f : x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ (b) $g : x \longmapsto \dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$ (c) $h : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}+1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}$