XVIII – Fonctions usuelles

1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière

1.1) La fonction valeur absolue

Proposition

La courbe représentative de la fonction valeur absolue est la réunion des deux demi-droites $[\mathrm{OI})$ *et* $[\mathrm{OI}')$*, où* $\mathrm{I}(1;1)$ *et* $\mathrm{I}'(-1;1)$.

Proposition

- *La fonction valeur absolue est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *mais elle n'est pas dérivable en* 0.
- *Sa dérivée est la fonction* f *définie par* $f(x) = -1$ *si* $x < 0$ *et* $f(x) = 1$ *si* $x > 0$.

1.2) La fonction partie entière

Proposition

- *Sur chaque intervalle* $[\, n\,;n+1\,[$ *avec* $n \in \mathbb{Z}$ *la partie entière est constante et vaut* n.
- *Sa courbe est la réunion de segments horizontaux qui forment un escalier infini.*

2/ Logarithme népérien et exponentielle

2.1) La fonction logarithme népérien

Définition *On appelle* ***logarithme népérien*** *la primitive sur* $]\,0\,;+\infty\,[$ *de la fonction inverse qui s'annule en* 1. *On la note* **ln**.

Théorème

- *La fonction* $\ln$ *est une bijection strictement croissante de* $]\,0\,;+\infty\,[$ *sur* $\mathbb{R}$.
- *De plus,* $\ln < 0$ *sur* $]\,0\,;1\,[$ *et* $\ln > 0$ *sur* $]\,1\,;+\infty\,[$.
- *Enfin,* $\boxed{\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty.}$

Proposition (propriété caractéristique)

On a pour tous réels $x > 0$, $y > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}$ $\boxed{\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)}$ $\boxed{\ln(x^n) = n\ln(x)}$

$\boxed{\ln(1) = 0}$ $\boxed{\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$ $\boxed{\ln\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\ln(x)}{2}}$

2.2) La fonction exponentielle

Définition *La bijection réciproque de la fonction logarithme népérien est appelée* ***la fonction exponentielle****. On la note* **exp.**

Théorème

- *La fonction exponentielle est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0\,;+\infty[$.*
- *De plus, elle est dérivable et $\exp' = \exp$.*
- *Enfin* $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \exp(x) = 0}$ *et* $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty.}$

Proposition (propriété caractéristique)

On a pour tous réels x, y et pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\times\exp(y)}$ $\boxed{\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}}$ $\boxed{\exp(nx) = \exp(x)^n}$

$\boxed{\exp(0) = 1}$ $\boxed{\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}}$ $\boxed{\exp\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}}$

Définition *On pose* $\boxed{\exp(1) = \mathrm{e}}$ *et l'on note alors* $\boxed{\exp(x) = \mathrm{e}^x}$ *pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

3/ Puissances réelles

3.1) Définition et premières propriétés

Définition *Soient $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. On pose alors* $\boxed{a^b = \mathrm{e}^{b\ln(a)}.}$

Corollaire *Pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, on a* $\boxed{a^b > 0}$ *et* $\boxed{\ln\left(a^b\right) = b\ln a.}$

3.2) Exponentielles et logarithmes de base quelconque

Définition *Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$. On appelle* ***exponentielle de base a*** *et l'on note* $\mathbf{exp}_a$ *la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $\boxed{\exp_a : x \longmapsto a^x}$.

Proposition

Pour tout $a > 0$, on a $\boxed{a^x = e^{x \ln a} > 0}$ *et* $\boxed{\ln(a^x) = x \ln a.}$

Proposition (comportement de $\exp_a$)

- *La fonction $\exp_a$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.*
- *Elle se comporte comme $\exp$ si $a > 1$ et comme $1/\exp$ si $0 < a < 1$.*
- *Dans tous les cas, $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et* $\boxed{\exp_a'(x) = a^x \ln a.}$

Définition *On appelle* ***logarithme décimal*** *et l'on note* $\mathbf{log}$ *la bijection réciproque de* $\mathbf{exp_{10}}$.
Elle est définie sur $]0;+\infty[$ par $\boxed{\log : x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\ln 10}}$.

Corollaire *Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$. Alors $\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$ et*

$$\boxed{y = 10^x \iff x = \log(y)} \qquad \boxed{\log(10^x) = x} \qquad \boxed{10^{\log(y)} = y}$$

Proposition (comportement de log)

- *La fonction $\log$ est une bijection strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.*
- *De plus, elle est dérivable sur $]0;+\infty[$ et* $\boxed{\log'(x) = \dfrac{1}{x \ln 10}.}$

3.3) Fonctions puissances et racines

Définition *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle* ***fonction puissance d'exposant α*** *la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par* $\boxed{f_\alpha : x \longmapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}}$.

Remarque : ne pas confondre les fonctions puissances et les fonctions exponentielles !!!

Proposition

La fonction f_α est dérivable sur $]0;+\infty[$ et l'on a $\boxed{(f_\alpha)'(x) = \alpha\, x^{\alpha-1}}$ *pour tout $x > 0$.*

Théorème (cas particulier)

- *Si $n \in \mathbb{N}^*$ est pair, la fonction* $f_n : x \longmapsto x^n$ *réalise une bijection entre* $[\,0\,;+\infty\,[$ *et* $[\,0\,;+\infty\,[$.
- *Si $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, la fonction* $f_n : x \longmapsto x^n$ *réalise une bijection entre* $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est appelée ***racine n**ième* *et notée* $g_n : x \longmapsto \sqrt[n]{x}$.
Elle vérifie de plus les relations $\boxed{\sqrt[n]{0} = 0}$ *et* $\boxed{\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}}$ *pour tout* $x > 0$.

3.4) Les croissances comparées

Théorème

Soient $a > 0$ *et* $b > 0$. *On a :*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} x^a\,|\ln x|^b = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\infty} |x|^a\,\mathrm{e}^{bx} = 0} \qquad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{bx}}{x^a} = +\infty}$$

Remarques :

❶ Lorsque a et b sont de signes opposés, ces limites ne sont pas des formes indéterminées.

❷ Attention à bien se ramener à l'une de ces formes pour les calculs de limites.

4/ Les fonctions circulaires

4.1) Rappels

Les fonctions sinus et cosinus sont appelées **fonctions circulaires** car elles permettent de repérer la position d'un point sur le cercle trigonométrique d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Proposition

- *Les fonctions* sin *et* cos *sont définies sur* $\mathbb{R}$ *et sont* 2π*-périodiques.*
- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- *La fonction* sin *est impaire et la fonction* cos *est paire.*
- *Elles sont dérivables sur* $\mathbb{R}$. *De plus,* $\boxed{\sin' = \cos}$ *et* $\boxed{\cos' = -\sin.}$

Proposition

- *La fonction* $\tan = \dfrac{\sin}{\cos}$ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle/\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *et elle est* π*-périodique.*
- *La fonction* tan *est impaire.*
- *Elle est dérivable sur son ensemble de définition et* $\boxed{\tan' = 1 + \tan^2 = 1/\cos^2.}$

4.2) Les fonctions Arcsinus et Arccosinus

Définition

- *La fonction sinus est une bijection continue et croissante de* $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1\,;1]$.
  Sa bijection réciproque est appelée Arcsinus et notée arcsin.
- *La fonction cosinus est une bijection continue et décroissante de* $[0\,;\pi]$ *sur* $[-1\,;1]$.
  Sa bijection réciproque est appelée Arccosinus et notée arccos.
- *On a les équivalences suivantes :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \arcsin(y) \\ y \in [-1\,;1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \sin(x) \\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}} \quad \textit{et} \quad \boxed{\begin{cases} x = \arccos(y) \\ y \in [-1\,;1] \end{cases} \iff \begin{cases} y = \cos(x) \\ x \in [0\,;\pi] \end{cases}}$$

Théorème

- *La fonction* arcsin *est une bijection impaire et croissante de* $[-1\,;1]$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$.
- *La fonction* arccos *est une bijection décroissante de* $[-1\,;1]$ *sur* $[0\,;\pi]$.
- *La fonction* arcsin *est dérivable sur* $]-1\,;1[$ *et* $\boxed{\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ *pour* $x \in\,]-1\,;1[$.
- *Pour tout* $x \in [-1\,;1]$, *on a* $\boxed{\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2.}$

4.3) La fonction Arctan

Définition *La fonction tangente est une bijection continue et croissante de* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $\mathbb{R}$.
Sa bijection réciproque est appelée Arctangente et notée arctan. *On a donc :*

$$\boxed{\begin{cases} x = \arctan(y) \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \iff \begin{cases} y = \tan(x) \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}}$$

Théorème

- *La fonction* arctan *est une bijection impaire et croissante de* $\mathbb{R}$ *sur* $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$.
- *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et* $\boxed{\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Argument d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{cases} \arg(z) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) & \text{si } \operatorname{Re}(z) > 0 \\[2ex] \arg(z) = \arctan\left(\dfrac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right) + \pi & \text{si } \operatorname{Re}(z) < 0 \end{cases}}$$

Exercices

1/ Les fonctions valeur absolue et partie entière

Exercice 1. On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{|x|+1}$ et l'on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe.

1) Déterminer son ensemble de définition puis étudier sa parité.
2) Dresser le tableau complet des variations de f.
3) Montrer que tout réel $y \in \left]-1\,;1\right[$ admet un unique antécédent par f.
   On déterminera son expression en fonction de y.

Exercice 2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

1) $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
2) $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
3) $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x + y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 3. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Calculer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor$ et $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor$.

2/ Logarithme népérien et exponentielle

Exercice 4. Trouver l'intrus parmi les nombres suivants :

$$A = \ln \sqrt{e^3} + e^{\ln \sqrt{3}} \qquad B = \ln(\sqrt[4]{e}) \qquad C = e^{-2\ln(2)} \qquad D = \frac{e^{\ln(3)-\ln(2)}}{e^{\ln(3)+\ln(2)}}$$

Exercice 5. Montrer que $\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \ln\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Résoudre sur leurs ensembles de définition respectifs

1) les équations $\ln(1 - 3x) = 2$ et $\ln(x^2 - 9) = \ln(x)$
2) l'inéquation $\ln|x + 1| - \ln|2x + 1| \leqslant \ln 2$

Exercice 7. Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} (\ln x - x^2)$ (b) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} (x-2)^2 \ln(x^3 - 8)$ (c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^3}$

(d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1-4x)}$ (e) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x \ln x + \sqrt{x}}$ (f) $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Exercice 8. Étudier les fonctions suivantes et donner l'allure de leurs courbes :

$$f : x \longmapsto \ln(1+x^2) \qquad g : x \longmapsto \frac{\ln x}{x^2} \qquad h : x \longmapsto \ln(\sin x)$$

Exercice 9. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{2x+1}{x^2+x} \qquad g : x \longmapsto \frac{1}{x\ln x} \qquad h : x \longmapsto \frac{2x+\cos x}{\left(1+\sqrt{x^2+1+\sin x}\right)\sqrt{x^2+1+\sin x}}$$

Exercice 10. En procédant à des études de variations, montrer que :

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1+x$ (b) $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad e^x \geqslant 1+x+x^2/2$

Exercice 11. Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\ln(x)}-1}{x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\,e^x - x^2$ (d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{e^x+x^2}$

3/ Puissances réelles

Exercice 12. Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

(a) $2^{x+3} = 3^{x+2}$ (b) $2^{x-1}+2^{2-x} = 3$ (c) $2x^{\frac{4}{5}} - 5x^{\frac{2}{5}} + 2 = 0$ (d) $5^x - 12\times 2^x = 29$

Exercice 13. Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que :

(a) $2^n < 10^3$ (b) $3^n < 100$ (c) $(0,2)^n > 0,0001$

Exercice 14. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto x^n\sqrt{x} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \qquad g : x \longmapsto \sqrt[4]{e^x} \qquad h : x \longmapsto \ln\left(x + e^{\sqrt[5]{x^3-2}}\right)$$

Exercice 15. Étudier les fonctions suivantes et donner l'allure de leurs courbes :

$$f : x \longmapsto \exp\left(\frac{x}{x+1}\right) \qquad g : x \longmapsto x\,e^{\sqrt{1-x^2}} \qquad h : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$j : x \longmapsto x^2e^{x-1} - \frac{x^2}{2} \qquad k : x \longmapsto x^x \qquad l : x \longmapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Exercice 16. Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \qquad g : x \longmapsto \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \qquad h : x \longmapsto \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}$$

Exercice 17. Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$.

1) Comparer au voisinage de $+\infty$ les expressions $a^{(b^x)}$ et $b^{(a^x)}$.
2) Comparer au voisinage de $+\infty$ les expressions $a^{(a^x)}$ et $x^{(x^a)}$.

4/ Les fonctions circulaires

Exercice 18.
Calculer de deux manières différentes l'argument du complexe $z = (5 - \mathrm{i})^4(1 + \mathrm{i})$.
En déduire que $4 \arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right) = \dfrac{\pi}{4}\cdot$ *(Formule de Machin)*

Exercice 19.
Résoudre les équations suivantes :

(a) $\arctan x + \arctan 2x = \dfrac{\pi}{4}$ (b) $\arctan(x) + \arctan(x^3) = \dfrac{3\pi}{4}$

Exercice 20.
Calculer la dérivée de la fonction $f : x \longmapsto \arccos\left(\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}\right) - 2 \arctan x$.
Que peut-on en déduire ?

Exercice 21.
Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto 2 \arctan\left(\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right) \qquad g : x \longmapsto \arctan\left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\right) \qquad h : x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 22.
Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) \qquad\qquad g : x \longmapsto (x + 1) \arctan x$$

Exercice 23.
Déterminer des DL_5 en 0 des fonctions arcsin, arccos et arctan.