XIX – Les matrices

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ et ou $\mathbb{C}$: c'est le corps des **scalaires**.

1/ Espaces de matrices

1.1) Les matrices de type (n, p)

Définition Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice de type (n, p)** ou encore **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout tableau de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

avec $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$. Leur ensemble est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ainsi, le nombre $a_{i,j}$ est le terme situé sur la i -ème ligne et la j -ième colonne de A .

Définition La **transposée** de $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice ${}^tA = (a'_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, où $a'_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.

Remarque : tA est ainsi obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Proposition

Pour toute matrice M , on a ${}^t({}^tM) = M$.

1.2) Les matrices carrées

Définition Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n .

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que **A est diagonale** lorsque $i \neq j \implies a_{i,j} = 0$.
On note I_n la matrice diagonale dont les termes diagonaux $a_{i,i}$ valent tous 1.
- On dit que **A est triangulaire supérieure** lorsque $i > j \implies a_{i,j} = 0$.
- On dit que **A est triangulaire inférieure** lorsque $i < j \implies a_{i,j} = 0$.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est triangulaire supérieure si, et seulement si, la matrice tA est triangulaire inférieure.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i,j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que **A est symétrique** lorsque $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$.
- On dit que **A est antisymétrique** lorsque $a_{i,j} = -a_{j,i}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1 ; n \rrbracket^2$.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

- 1) La matrice A est symétrique si, et seulement si, ${}^tA = A$.
- 2) La matrice A est antisymétrique si, et seulement si, ${}^tA = -A$.

Définition

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i,j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace de A** le nombre

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}.$$

2/ Opérations sur les matrices

2.1) Définitions

Définition Pour n et $p \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on définit

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et

$$\lambda \cdot A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Définition Soient $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices.

On appelle **produit de A par B** la matrice $AB = (c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; m \rrbracket \times \llbracket 1 ; p \rrbracket \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Ainsi, le terme $c_{i,j}$ s'obtient en effectuant le produit scalaire de la i -ième ligne de la matrice A par la j -ième colonne de la matrice B .

Remarque : il faut que les formats des matrices A et B soient compatibles pour pouvoir définir leur produit AB . En particulier, ce produit matriciel n'est pas du tout commutatif.

2.2) Propriétés des opérations

Proposition (associativité)

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Alors $A(BC) = (AB)C$ que l'on note plus simplement ABC .

Proposition (bilinéarité)

Soient $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B, B' \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \lambda' \in \mathbb{K}$.

Alors $A(\lambda B + \lambda' B') = \lambda AB + \lambda' AB'$ et $(\lambda A + \lambda' A')B = \lambda AB + \lambda' A'B$.

Proposition (propriétés de la transposée)

• Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a ${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$.

• Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a ${}^t(AB) = {}^tB {}^tA$.

Cas des matrices carrées

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a $\text{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \text{tr}(A) + \mu \text{tr}(B)$ ainsi que $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$; cependant $\text{tr}(AB) \neq \text{tr}(A) \times \text{tr}(B)$ en général.

Définition Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Proposition (formule du binôme de Newton)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on a $(A + B)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$.

3/ Application aux systèmes linéaires

3.1) Écriture matricielle d'un système linéaire

Définition

Considérons le système linéaire (S)
$$\begin{cases} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \cdots + a_{1,p} x_p = b_1 \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \cdots + a_{2,p} x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1} x_1 + a_{n,2} x_2 + \cdots + a_{n,p} x_p = b_n \end{cases}$$

On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la **matrice associée au système (S)**. En lui ajoutant en dernière colonne les valeurs $b_1, b_2, \dots, b_n$, on obtient la **matrice augmentée du système**.

Proposition

Tout système linéaire (S) de n équations à p inconnues $x_1, \dots, x_p$ s'écrit matriciellement

$$AX = B$$

avec $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sa matrice et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ son second membre.

Pour résoudre un système linéaire, on le transforme en un système équivalent à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. En l'occurrence :

Proposition

Si l'on passe d'un système linéaire (S) à un autre système (S') au moyen d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes, alors la matrice augmentée de (S') s'obtient en faisant subir la même suite d'opérations à la matrice augmentée de (S).

Définition Deux matrices A et A' sont dites **équivalentes en lignes** si elles se déduisent l'une de l'autre au moyen d'une suite finie d'opérations sur les lignes. On note alors $A \underset{L}{\sim} A'$.

3.2) Échelonnement et pivot de Gauss

Définition Une matrice est dite **échelonnée en lignes** si elle est triangulaire supérieure et que :

- dès qu'une ligne est entièrement nulle, toutes les suivantes le sont aussi
- le nombre de 0 en début de ligne croît d'une ligne non nulle à la suivante

On appelle alors **pivot** le premier coefficient non nul de chaque ligne non nulle.

Remarque : un système linéaire est échelonné ssi sa matrice est échelonnée en lignes.

L'algorithme du **pivot de Gauss-Jordan** permet d'échelonner un système linéaire quelconque. Appliqué à une matrice, il va de la même manière l'échelonner en lignes. Ainsi :

Proposition

Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée en lignes.

Définition (rang d'une matrice)

- Le **rang** d'une matrice échelonnée en lignes est égal au nombre de pivots.
- Le rang d'une matrice est le rang de toute matrice échelonnée en lignes équivalente en lignes.

4/ Les matrices inversibles

Définition Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **inversible** s'il existe une matrice $M' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $MM' = M'M = I_n$. On la notera alors M^{-1} .
On note de plus $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque : on verra plus tard que la condition $MM' = I_n$ implique $M'M = I_n$.

Proposition (inverse et opérations)

Soient $A, B \in GL_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors A^{-1} , AB , λA et tA sont inversibles et

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$$

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$$

Proposition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\text{rg}(M) = n$.

Recherche pratique de l'inverse

Pour savoir si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et calculer le cas échéant son inverse, on cherche à résoudre pour $Y \in \mathbb{K}^n$ fixé le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. On exprime ainsi X en fonction de Y , ce qui nous donne $X = A^{-1}Y$.

Théorème

Si A est inversible, le système $AX = B$ admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.

Définition La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a pour **déterminant** le nombre $\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Proposition

Une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $\det(M) \neq 0$.

Exercices

Exercice 1. Effectuer les produits matriciels suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^n$$

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A :

$$(a) \ n = 2 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \ n = 3 \text{ et } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Déterminer toutes les matrices $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = B \times C$, sachant que

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 4. Calculer les puissances successives des matrices suivantes :

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soient $A = \text{Diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Quelle est la tête de la matrice $P(A)$? À quelles conditions a-t-on $P(A) = 0$?

Exercice 6. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n telle que $A^3 = 0_n$. Montrer que la matrice $I_n - A$ est inversible et déterminer son inverse.