XX – Nombres et suites réels

1/ Autour de la relation d'ordre

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1.1) Plus grand et plus petit élément

Définition

- *On dit que* $\boldsymbol{a \in \mathrm{A}}$ ***est le plus grand élément de*** $\mathbf{A}$ *si* $\boldsymbol{x \leqslant a}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in \mathrm{A}}$*.*
  Quand il existe, le plus grand élément de A *et unique et se note* **max(A).**
- *On dit que* $\boldsymbol{a \in \mathrm{A}}$ ***est le plus petit élément de*** $\mathbf{A}$ *si* $\boldsymbol{x \geqslant a}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in \mathrm{A}}$*.*
  Quand il existe, le plus petit élément de A *est unique et se note* **min(A).**

1.2) Minorants et majorants

Définition

- *On dit que* $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ ***est un majorant de*** $\mathbf{A}$ *si* $\boldsymbol{x \leqslant a}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in \mathrm{A}}$*.*
  Dans ce cas, on dira que la partie A *est* ***majorée****.*
- *On dit que* $\boldsymbol{a \in \mathbb{R}}$ ***est un minorant de*** $\mathbf{A}$ *si* $\boldsymbol{x \geqslant a}$ ***pour tout*** $\boldsymbol{x \in \mathrm{A}}$*.*
  Dans ce cas, on dira que la partie A *est* ***minorée****.*

Remarque : une partie majorée / minorée admet une infinité de majorants / de minorants.

1.3) Borne inférieure, borne supérieure

Définition

- *La borne inférieure de* A *est, s'il existe,* ***le plus grand des minorants de*** $\mathbf{A}$*, noté* **inf(A).**
- *La borne supérieure de* A *est, s'il existe,* ***le plus petit des majorants de*** $\mathbf{A}$*, noté* **sup(A).**

Théorème (fondamental)

- *Toute partie non vide et majorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne supérieure.*
- *Toute partie non vide et minorée de* $\mathbb{R}$ *admet une borne inférieure.*

Remarque : ces bornes n'appartiennent pas toujours à l'ensemble (penser à $[\,0\,;1\,[$). En fait, $\max(\mathrm{A})$ existe ssi $\sup(\mathrm{A}) \in \mathrm{A}$, et dans ce cas $\max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A})$. Idem pour min et inf.

Proposition (caractérisation du sup)

Soient $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ *une partie non vide et majorée.*

Alors $\mathrm{M} = \sup(\mathrm{A}) \iff \begin{cases} (1) & \forall a \in \mathrm{A},\ a \leqslant \mathrm{M} \\ (2) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{A},\ a > \mathrm{M} - \varepsilon \end{cases}$

Proposition (caractérisation de l'inf)

Soient $m \in \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ *une partie non vide et minorée.*

Alors $m = \inf(\mathrm{A}) \iff \begin{cases} (1) & \forall a \in \mathrm{A},\ a \geqslant m \\ (2) & \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathrm{A},\ a < m + \varepsilon \end{cases}$

2/ Généralités sur les suites

2.1) Définition

Définition

*Une **suite réelle** est une application de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$.

- *On note* u_n *l'image de* $n \in \mathbb{N}$ *par* u *: c'est le **terme de rang*** n *(ou **terme général**) de* u.
- *La suite* u *est alors notée* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* (u_n).

Remarque : on peut aussi définir une suite sur $\mathbb{N}^*$ ou même sur $\{n \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant n_0\}$, où $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, on notera $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou bien $(u_n)_{n\geqslant n_0}$.

Définition *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On dit qu'elle est :*

- ***constante*** *si* $u_{n+1} = u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
- ***stationnaire*** *s'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_{n+1} = u_n$ *pour tout* $n \geqslant n_0$ *;*

Remarque : une suite stationnaire est tout simplement constante à partir d'un certain rang.

2.2) Sens de variation

Définition *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle. On dit qu'elle est :*

- ***croissante*** *lorsque* $u_{n+1} \geqslant u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- ***strictement croissante*** *lorsque* $u_{n+1} > u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- ***décroissante*** *lorsque* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- ***strictement décroissante*** *lorsque* $u_{n+1} < u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarques :

❶ On dira qu'une suite est monotone si elle est croissante ou décroissante.

❷ Une suite n'est en général ni croissante ni décroissante, comme $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Il y a trois façons d'étudier les variations d'une suite réelle.

(a) Technique algébrique

On étudie le signe de $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$ afin de comparer u_{n+1} à u_n.
Dans certains cas, il pourra être intéressant d'écrire $u_{n+1} - u_n = u_n\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right)$.

(b) Technique fonctionnelle

Lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par une formule du style $u_n = f(n)$, on peut déduire les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de celles de la fonction f.

- Si f est monotone sur $[\,0\,;+\infty\,[$, alors $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et de même monotonie.
- Cependant, la réciproque est fausse : penser à la fonction $f : x \longmapsto \sin(\pi\, x) - x$.

(c) Raisonnement par récurrence

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par récurrence, on représente graphiquement ses premiers termes afin d'observer son comportement avant d'établir par récurrence le résultat pressenti (en général, un encadrement permettant d'étudier les variations ... mais pas forcément).

2. 3) Suites bornées

Définition *Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite :*
- ***majorée*** *s'il existe* $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \leqslant \mathrm{M}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- ***minorée*** *s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que* $u_n \geqslant m$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
- ***bornée*** *si elle est à la fois majorée et minorée (c'est-à-dire que* $|u_n|$ *est majorée).*

Remarque : la technique d'étude dépend de la définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Si elle est définie par une relation *explicite* $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier la fonction f.
- Si elle est définie par une relation *implicite* $u_{n+1} = f(u_n)$, il faut procéder par récurrence.

3/ Limite d'une suite

3.1) Suites convergentes

Définition *On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente** s'il existe un réel ℓ tel que*

$$\boxed{\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,n_0\in\mathbb{N}\quad \forall\,n\geqslant n_0\qquad |u_n-\ell|<\varepsilon}$$

*On note alors $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$: c'est la **limite** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Théorème

- *Toute suite convergente admet une unique limite. On peut ainsi parler de **la** limite.*
- *Toute suite convergente est bornée. Attention, la réciproque est fausse.*

Proposition

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ si, et seulement si, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ.

Remarque : pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, il suffit de vérifier que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers des réels différents ... comme pour $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition

Une suite convergente de limite ℓ non nulle est de signe constant à partir d'un certain rang.

3.2) Suites divergentes

Définition *On dit que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge** si elle ne converge vers aucun réel.*

Définition

- *On dit que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$** et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ si*

$$\boxed{\forall\,A\in\mathbb{R}\quad \exists\,n_0\in\mathbb{N}\quad \forall\,n\geqslant n_0\qquad u_n\geqslant A}$$

- *On dit que **$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$** et l'on note $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ si*

$$\boxed{\forall\,A\in\mathbb{R}\quad \exists\,n_0\in\mathbb{N}\quad \forall\,n\geqslant n_0\qquad u_n\leqslant A}$$

Remarque : il y a deux types de suites divergentes, les unes de limite infinie comme $(n^3)_{n\in\mathbb{N}}$ et les autres sans limite, comme $(\cos n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans le premier cas, les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent encore la même limite.

3.3) Les suites de référence

Proposition (suites associées à une fonction)

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $\mathrm{I} = [\,a\,;+\infty\,[$. Si la fonction f admet une limite en $+\infty$, alors la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet aussi une limite et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x).}$

Proposition (suites géométriques de raison q)

- *Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.*
- *Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.*
- *Si $q \leqslant -1$, la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.*

Remarque : lorsque $q \in \mathbb{C}$, la suite converge uniquement pour $q = 1$ et $|q| < 1$.

4/ Opérations sur les limites

Aucune différence avec les limites de fonctions.

5/ Comparaisons de suites

5.1) Règles de passage à la limite

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et convergentes.
Si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Corollaire *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente et $(a;b) \in \mathbb{R}^2$.*

- *Si $u_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant b$.*
- *Si $u_n \geqslant a$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant a$.*

Remarque : attention, ceci n'est valable qu'avec des **inégalités larges**.

5.2) Règles de comparaison

Théorème (des gendarmes)

On considère trois suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel ℓ tels que :

- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *à partir d'un certain rang*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell.}$

Corollaire *On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et un réel ℓ tels que :*

- $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ *à partir d'un certain rang*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$

Corollaire *Le produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle converge vers 0.*

Théorème (de minoration / de majoration)

Soient deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang N_0.

- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- *Si* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

5.3) Utilisation des relations de comparaison

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.

- *Si* $u_n = o(v_n)$ *et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- *Si* $u_n \sim v_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ *(réelle ou infinie) alors* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Théorème (croissances comparées spécifiques aux suites)

Soient $a > 1$ et $b > 0$ deux réels. Alors $\boxed{n^b = \underset{n\to+\infty}{o}(a^n)}$ *et* $\boxed{a^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)}$

6/ Les suites monotones

6.1) Limites des suites monotones

Théorème (suites croissantes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle croissante.

1) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, alors elle converge vers* $\ell = \sup\left\{u_n \middle/ n \in \mathbb{N}\right\}$.
2) *Sinon,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque : c'est un des théorèmes les plus puissants du chapitre. Il permet en particulier d'établir les convergences de suites récurrentes, dont l'étude était jusque là frustrante.

Théorème (suites décroissantes)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante.

1) *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée, alors elle converge vers* $\ell = \inf\left\{u_n \middle/ n \in \mathbb{N}\right\}$.
2) *Sinon,* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

6.2) Les suites adjacentes

Définition *Deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites* ***adjacentes*** *lorsque :*

- *l'une des suites est croissante et l'autre est décroissante ;*
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites adjacentes, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante. Alors :

- *il existe un réel $\ell \in \mathbb{R}$ tel que* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$;
- *on a* $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : attention, ce résultat ne permet pas en général de déterminer la limite.

6.3) Comparaison de sommes et d'intégrales

Soient f une fonction monotone positive définie sur $]0\,;+\infty[$ et $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k)$. On souhaite étudier le comportement asymptotique de cette suite.

❶ Grâce à la monotonie de f, on encadre $f(k)$ entre $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $k > 1$.

❷ On déduit en sommant que $\mathrm{S}_n - f(1)$ est encadré entre $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_1^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_2^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

❸ La suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant croissante, deux cas se présentent.

- Si $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, alors $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante majorée donc convergente.
- Sinon, I_n tend vers $+\infty$ et S_n aussi d'après le théorème de minoration.

Exemple : cas de la suite de terme général $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercices

1/ Généralités

Exercice 1.
Les parties $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n} \Big/ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ et $B = \left\{\dfrac{2}{n} - n \Big/ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ sont-elles majorées / minorées ?
Si oui, déterminer leurs bornes supérieures / inférieures. Sont-ce des max / min ?

Exercice 2.
Même question avec les parties suivantes (et deux réels $a > 0$ et $b > 0$) :

$$A = \left\{\frac{n}{mn+1} \Big/ (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\} \qquad B = \left\{\frac{n}{mn+1} \Big/ (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} \qquad C = \left\{x^2 - 2x + 3 \Big/ x \in \mathbb{R}\right\}$$

$$D = \left\{a + bn \Big/ n \in \mathbb{N}\right\} \qquad E = \left\{a + (-1)^n b/n \Big/ n \in \mathbb{N}^*\right\} \qquad F = \left\{-x^2 + 2x \Big/ x \in]\,1\,;2\,[\right\}$$

Exercice 3.
Soient A et B deux parties non vides telles que $x \leqslant y$ pour tout $(x, y) \in A \times B$.
Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.

Exercice 4. Soient A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée, $x \in \mathbb{R}$ et

$$-A = \left\{-a \Big/ a \in A\right\} \qquad\qquad x + A = \left\{x + a \Big/ a \in A\right\}$$

1) Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$ et $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2) Montrer que $\sup(x + A) = x + \sup(A)$ et $\inf(x + A) = x + \inf(A)$.

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.

1) Déterminer $\sup(A \cup B)$ et $\inf(A \cup B)$.
2) On suppose que $A \cap B \neq \emptyset$. Déterminer alors $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$.

Exercice 6. Étudier les variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(a) $u_n = 3n + (-1)^n$ (b) $u_n = n - 3^n$ (c) $u_n = n + \cos n$ (d) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

(e) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$ (f) $u_n = (0,1)^n\, n^2$ (g) $u_n = n^2(3 - n)$ (h) $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(\frac{2k}{2k+1}\right)$

Exercice 7.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient croissantes.
Peut-on en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ?

Exercice 8. Étudier les variations des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3) $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4) $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 9. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes sont-elles bornées ?

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{7}\right)^k$ (b) $u_n = \dfrac{3n}{n+1}$ (c) $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n}$

Exercice 10.

1) Le produit de deux suites réelles minorées est-il minoré ?
2) Le produit de deux suites réelles majorées est-il majoré ?

2/ Limites de suites

Exercice 11. Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(a) $u_n = n^2 - 1 + \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n = (1 - 3n)(n^2 - 2)$ (c) $u_n = 1 - 5^n$

(d) $u_n = \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n + 3$ (e) $u_n = \dfrac{1}{n + 5^n}$ (f) $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{7^k}$

(g) $u_n = \dfrac{\sqrt{n} - n}{2n + 1}$ (h) $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n} + 1} - \dfrac{n}{\sqrt{n} + 2}$ (i) $u_n = \sqrt{n^2 + 6n} - n$

Exercice 12. Étudier les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes :

(a) $u_n = 4n^2 - n + 5$ (b) $u_n = \dfrac{5n + 3}{3n^2 + 5}$ (c) $u_n = \dfrac{2n + 3}{3n - 1}$

(d) $u_n = \cos(n) - n$ (e) $u_n = \dfrac{3 - \sin(n)}{n}$ (f) $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \cos(n)$

(g) $u_n = 2n + (-1)^n$ (h) $u_n = \dfrac{3^n + 4^n}{4^n}$ (i) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n + \frac{(-1)^n}{n}}$

Exercice 13. Étudier la convergence des suites définies dans l'exercice 9.

Exercice 14. Soient $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{n}} + b^{\frac{1}{n}}}{2}\right)^n$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (a^n + b^n)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice 15.
À l'aide d'un encadrement, montrer que les suites suivantes sont convergentes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}$ (b) $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$ (c) $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{\sqrt{n^4 + k}}$

Exercice 16. Déterminer les limites des suites de termes généraux suivants :

(a) $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (b) $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$ (c) $u_n = \dfrac{n^3}{n!}$ (d) $u_n = n \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$

Exercice 17. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

1) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{(2n+1)\,u_n}{3(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{n-1}{2n+3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 18.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$. Démontrer alors que $u_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

Exercice 19. Rechercher des équivalents simples des suites suivantes :

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad v_n = \tan\left(\frac{\pi}{n+3}\right) \qquad w_n = \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

Exercice 20. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que l'équation $\tan x = \dfrac{1}{x}$ admet une unique solution $x_n \in \left]n\pi\,;n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) Donner alors un équivalent de $\tan(x_n - n\pi)$ puis de $x_n - n\pi$.

3/ Suites monotones

Exercice 21.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le nombre u_n en juxtaposant les entiers de 1 à n après la virgule :

$$u_1 = 0,1 \qquad u_2 = 0,12 \qquad u_5 = 0,12345 \qquad \text{et} \qquad u_{12} = 0,123456789101112$$

par exemple. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 22.
Idem lorsque le nombre u_n est défini en faisant suivre un 1 de n 3 et n 8 après la virgule

Exercice 23. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Prouver alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 24.
Montrer que la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée. Que peut-on en déduire ?

Exercice 25.

1) Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2) En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

Exercice 26.

1) Montrer que $\dfrac{1}{n^2} \leqslant \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 2$.
2) En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

Exercice 27. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2) (a) Prouver que $(n+2)\,\mathrm{I}_{n+2} = (n+1)\,\mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1}.
3) (a) Montrer que $(n+1)\,\mathrm{I}_{n+1}\,\mathrm{I}_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Établir que $\dfrac{n+1}{n+2} \leqslant \dfrac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n} \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire enfin que $\mathrm{I}_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Exercice 28.
Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$ et $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 3u_n}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Indication : on pourra étudier les suites de termes généraux $u_n - v_n$ et $u_n + v_n$.

Exercice 29.
Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ci-dessous forment des couples de suites adjacentes :

(a) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$ (b) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$

Exercice 30. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution $x_n \in \,]\,0\,;+\infty\,[$.
2) Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis que $x_n \sim n$.
3) Vérifier que $x_n = n - \ln n + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$. *On pourra écrire* $x_n = n + \underset{n\to+\infty}{o}(n)$.