XXI – Limites et continuité

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un point ou une borne de I.
On dira alors que f est **définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$**.

1/ Étude locale d'une fonction

1.1) Limite finie

Définition *Soit ℓ un réel.*

- *Si $a \in \mathbb{R}$: on dit que **f tend vers ℓ en a** et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad |x - a| < \alpha \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$
- *Si $a = +\infty$: on dit que **f tend vers ℓ en $+\infty$** et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad x \geqslant \mathrm{M} \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$
- *Si $a = -\infty$: on dit que **f tend vers ℓ en $-\infty$** et l'on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ si*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad x \leqslant m \Longrightarrow \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$$

Remarque : c'est simplement la traduction rigoureuse de la notion intuitive de limite vue précédemment. Elle permet de retrouver les limites usuelles et les opérations sur les limites.

1.2) Limites infinies

Définition

- *Si $a \in \mathbb{R}$: on dit que **f tend vers $+\infty$ en a** et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ si*
$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad |x - a| < \alpha \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{M}$$
- *Si $a = +\infty$: on dit que **f tend vers $+\infty$ en $+\infty$** et l'on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ si*
$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \exists \mathrm{M}_1 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad x \geqslant \mathrm{M}_1 \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{M}$$
- *Si $a = -\infty$: on dit que **f tend vers $+\infty$ en $-\infty$** et l'on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ si*
$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathrm{I} \qquad x \leqslant m \Longrightarrow f(x) \geqslant \mathrm{M}$$

Remarque : autrement dit, la fonction f est minorée par tout réel au voisinage de a.

Définition *On dit que f tend vers $-\infty$ en a et l'on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ si $\lim_{x \to a} (-f(x)) = +\infty$.*

1.3) Limites et suites

Théorème

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$.
Si la fonction f admet une limite ℓ en a, alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell.}$

Utilisation pratique : pour montrer que f n'admet pas de limite en a, il suffit d'exhiber deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers a et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$.

2/ Propriétés des limites

2.1) Généralités

Théorème (unicité de la limite)

Si une fonction f admet une limite en $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, celle-ci est unique.
*On parle alors de **la** limite de f en a.*

Proposition

Les limites de f à gauche et à droite de a sont celles de ses restrictions à $\mathrm{I} \cap]-\infty\,; a[$ et $\mathrm{I} \cap]a\,; +\infty[$.
Soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$: on a $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \ell}$

Remarque : c'est un résultat essentiel dès que f est définie par différentes expressions.

2.2) Cas des limites finies

Proposition (continuité ponctuelle)

Supposons que f admette une limite finie en un point $a \in \mathrm{I}$. Nécessairement $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposition

Si la fonction f admet une limite finie $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ en a, elle est bornée au voisinage de a.
Plus précisément : pour $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$, si $m < \ell < \mathrm{M}$ alors $m < f(x) < \mathrm{M}$ au voisinage de a.

Remarque : ainsi, une fonction de limite non nulle en a ne s'annule pas et reste de signe constant (celui de la limite bien évidemment) au voisinage de a.

2.3) Fonctions monotones

Théorème

Soit f une fonction croissante sur un intervalle $]\,a\,;b\,[$.

1) *Si f est majorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x) \in \mathbb{R}$. Sinon, $\lim\limits_{x\to b} f(x) = +\infty$.*
2) *Si f est minorée sur $]\,a\,;b\,[$, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{x\in]\,a\,;b\,[} f(x) \in \mathbb{R}$. Sinon, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.*

Théorème

On suppose que f est croissante et que I est un intervalle ouvert. Alors f admet des limites finies à gauche et à droite de tout point a de I et $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x).}$

Remarque : on a des résultats analogues pour une fonction décroissante f.

3/ Continuité

3.1) Généralités

Définition

- *On dit que* ***la fonction f est continue en $a \in \mathrm{I}$*** *lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.*
- *On parlera de même de continuité à gauche et à droite en a.*
- *On dit que* ***la fonction f est continue sur I*** *lorsqu'elle est continue en tout point de I.*

Proposition

Si une fonction f est continue sur un intervalle I, on peut tracer sa courbe sans lever le crayon.
Ce n'est évidemment plus le cas pour une fonction définie sur une réunion d'intervalles.

Théorème (opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.
Alors les fonctions fg et $\lambda f + \mu g$ sont continues sur I.
Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors la fonction f/g est également continue sur I.

Théorème (de composition)

Soient f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et g une fonction continue sur un intervalle J de $\mathbb{R}$. On suppose que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. Alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Remarque : la plupart des fonctions définies par une expression explicite sont obtenues par composition, produit et somme des fonctions continues, ce qui prouve leur continuité.

Proposition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de I convergeant vers $a \in \mathrm{I}$, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Remarque : si f est une fonction continue, une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ ne peut donc converger que vers un point fixe de f, càd une solution de l'équation $f(x) = x$.

3.2) Restrictions et prolongements

Proposition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ tels que $\mathrm{I} \subset \mathrm{J}$, et f une fonction définie sur J.
Si la fonction f est continue sur J, alors sa restriction à I est continue sur I.

Proposition

Soient f une fonction définie sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} =]\,a\,;c\,[$ et b un point de I.
Si f est continue sur $]\,a\,;b\,]$, en b et sur $[\,b\,;c\,[$, alors elle est continue sur $]\,a\,;c\,[$.

Théorème (prolongement par continuité)

Soit f une fonction continue, définie au voisinage de $a \in \mathbb{R} \setminus \mathscr{D}_f$ et telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
On définit la fonction F sur $\mathscr{D}_f \cup \{a\}$ par $\mathrm{F}(x) = f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et $\mathrm{F}(a) = \ell$.
Alors cette fonction F est continue et vérifie $f = \mathrm{F}_{|\mathscr{D}_f}$: elle ***prolonge f par continuité****.*

3.3) Fonctions continues sur un intervalle

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ et k un réel. On suppose que :

1) *la fonction f est continue sur $[\,a\,;b\,]$;*
2) *le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Il existe alors un réel $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = k$.

Application à la résolution d'équations de la forme $f(x) = k$.

On montre l'existence de solutions avec le TVI et les cerne par balayage avec la calculatrice. De plus, la démonstration du TVI est à la base d'un algorithme de résolution approchée.

Remarque : on peut également énoncer le TVI avec des limites en a ou en b et non plus des images par f. Une formulation plus générale permet d'englober tous les cas de figure :

Théorème (image d'un intervalle)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. L'ensemble $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Définition *On appelle **segment** tout intervalle fermé borné, càd de la forme $[\,a\,;b\,]$ avec $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.*

Théorème (image d'un segment)

L'image d'un segment par une fonction continue (sur ce segment) est un segment.
En particulier, toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Remarque : Si la fonction f est continue sur un segment I de $\mathbb{R}$, on a donc $f(\mathrm{I}) = [\,m\,;\mathrm{M}\,]$ où $m = \min\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x)$. Il ne reste qu'à débusquer ces extrema.

3. 4) Continuité et bijectivité

Théorème (de la bijection)

Soient f une fonction définie sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$ et k un réel. On suppose que :

1) *la fonction f est continue sur $[\,a\,;b\,]$*
2) *la fonction f est strictement monotone sur $[\,a\,;b\,]$*
3) *le réel k est compris entre $f(a)$ et $f(b)$*

*Il existe alors un **unique** réel $c\in[\,a\,;b\,]$ tel que $f(c)=k$.*

Remarque : on peut maintenant dénombrer les solutions d'une équation $f(x)=k$ en se restreignant à des intervalles où f est strictement monotone.

Théorème (bijection entre deux intervalles)

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors :

1) *f réalise une bijection entre I et l'intervalle $\mathrm{J}=f(\mathrm{I})$.*
2) *Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y=x$.*
3) *f^{-1} est continue sur J et de même monotonie que f.*

3. 5) Continuité et valeur moyenne

Proposition

La valeur moyenne sur un segment d'une fonction continue fait partie des valeurs atteintes par la fonction. Autrement dit, elle admet un antécédent par f.

Exercices

Exercice 1.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.
Montrer que pour tout réel α, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - \alpha x] = +\infty$.

Exercice 2.
Soient $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{b}{x} \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$.

Exercice 3.
Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que la fonction f est constante.

Exercice 4. Étudier la continuité de la fonction $f : x \longmapsto x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Exercice 5. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que les fonctions suivantes soient continues :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x + 5 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;2\,] \\ ax + b & \text{si} \quad x \in \,]\,2\,;8\,] \\ -x + 3 & \text{si} \quad x \in \,]\,8\,;+\infty\,[\end{cases} \qquad g : x \longmapsto \begin{cases} x - 5 & \text{si} \quad x \in \,]-\infty\,;2\,] \\ -\sqrt{ax + b} & \text{si} \quad x \in \,]\,2\,;8\,] \\ -x + b & \text{si} \quad x \in \,]\,8\,;+\infty\,[\end{cases}$$

Exercice 6. Peut-on prolonger par continuité à $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes ?

$$f : x \longmapsto \frac{5x^2 - 12x + 4}{x - 2} \text{ sur } \mathbb{R} \smallsetminus \{2\} \qquad g : x \longmapsto \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|} \text{ sur } \mathbb{R} \smallsetminus \{-1; 1\}$$

Exercice 7.
Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$.
Montrer qu'il existe un réel $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $f(c) = \dfrac{f(a) + 2f(b)}{3}$.

Exercice 8.
Montrer que l'équation $2x = \sin\left(x^2 + 2x + \sqrt{3}\right)$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9.
Soit $f : [\,0\,;1\,] \longrightarrow [\,0\,;1\,]$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe au moins un réel $x \in [\,0\,;1\,]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 10.

1) Montrer que le cosinus admet un unique point fixe dans l'intervalle $\left[\,0\,;\frac{\pi}{2}\,\right]$.
2) Montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $\left]\,\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\,\right[$.

Exercice 11.
Montrer que tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Exercice 12.

1) Soit $f : x \longmapsto 2x^3 + 5 - x^4$ sur l'intervalle $[\,1\,;+\infty\,[$. Étudier l'équation $f(x) = 4$.
2) Soit $f : x \longmapsto x^2 - \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]\,0\,;5\,]$. Étudier l'équation $f(x) = 7$.

Exercice 13.

1) Démontrer que l'équation $4x^5 - x^2 + x + 1 = 0$ admet au moins une racine réelle.
2) Montrer que toutes ses racines réelles sont comprises entre -1 et 1.

Exercice 14.
Soit f une fonction continue sur un intervalle I et telle que $f(\mathrm{I})$ est fini.
Prouver que la fonction f est constante.

Exercice 15.
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Démontrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$.
Et si l'on suppose $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$? $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$?

Exercice 16.
Soit f une fonction continue et non constante sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$.
On suppose que $f(a) = f(b)$ et l'on note $m = \min\limits_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$ et $\mathrm{M} = \max\limits_{x\in[\,a\,;b\,]} f(x)$.

Montrer que tout élément de $]\,m\,;\mathrm{M}\,[$ admet au moins deux antécédents par f dans $[\,a\,;b\,]$.

Exercice 17.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que $f(2x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que cette fonction f est constante.

Exercice 18.
On veut déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x + y) = f(x)\,f(y)$$

1) Vérifier qu'une telle fonction f est nécessairement positive.
2) Montrer que si f s'annule en un point, f est la fonction nulle.
3) Cas $f > 0$: montrer que f est de la forme $f : x \longmapsto \mathrm{e}^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$ fixé.

   Indication : on déterminera l'expression de f sur $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{Z}$ puis sur $\mathbb{Q}$. Ensuite, on justifiera que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels en pensant au développement décimal.
4) Conclure