XXIII – Les espaces vectoriels

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et E désigne $\mathbb{K}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \middle/ \forall\, i \in [\![1\,; n]\!],\ x_i \in \mathbb{K}\right\}$.

1/ Structure vectorielle de $\mathbb{K}^n$

On va munir l'ensemble E d'opérations qui généralisent les opérations sur les vecteurs du plan (soit $\mathbb{R}^2$) ou de l'espace (c'est-à-dire $\mathbb{R}^3$).

Définition

- *Les éléments de* E *sont appelés* ***vecteurs****. On les note parfois avec une flèche.*
- *L'élément* $(0, \ldots, 0)$ *de* E *est appelé* ***vecteur nul*** *et noté* 0_E *ou simplement* $\overrightarrow{0}$.
- *Les éléments de* $\mathbb{K}$ *sont appelés les* ***scalaires****.*

Remarque : c'est un vocabulaire que l'on a déjà croisé dans le cours de géométrie.

Définition

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$, $\overrightarrow{u}(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}$ *et* $\overrightarrow{v}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{E}$.

- *On définit l'****addition de deux vecteurs*** *par* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n) \in \mathrm{E}$.
- *On définit le* ***produit d'un vecteur par un scalaire*** *par* $\lambda \cdot \overrightarrow{u} = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n) \in \mathrm{E}$.

Remarque : pas de surprise ici, cela correspond bien aux opérations sur les vecteurs du plan ou de l'espace. Attention toutefois, **on ne multiplie pas les vecteurs entre eux !**

Théorème (propriétés fondamentales)

Pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ *et* $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathrm{E}^2$, *on a les relations suivantes :*

1)	$\overrightarrow{u} + \left(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right) = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w}$	*5)*	$1 \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$
2)	$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$	*6)*	$\lambda \cdot \left(\mu \cdot \overrightarrow{u}\right) = (\lambda\mu) \cdot \overrightarrow{u}$
3)	$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$	*7)*	$\lambda \cdot \left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \lambda \cdot \overrightarrow{v}$
4)	$\overrightarrow{u} + \left(-\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$	*8)*	$(\lambda + \mu) \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \cdot \overrightarrow{u} + \mu \cdot \overrightarrow{u}$

On dit alors que **(E, +, ·)** ***est un*** $\mathbb{K}$***-espace vectoriel*** *ou encore un* $\mathbb{K}$***-ev****.*

Remarque : plus généralement, on dit qu'un ensemble possède une structure de $\mathbb{K}$-ev s'il est muni d'une addition interne + et d'une multiplication externe · vérifiant les huit propriétés ci-dessus. Ainsi $\mathbb{C}$, $\mathrm{R}_n[\mathrm{X}]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ou encore $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev, de même que l'ensemble des suites réelles et l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène. Ils sont partout ! ! !

Proposition (propriétés du produit)

Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$. *Alors :*

$\boxed{(-\lambda)\cdot\overrightarrow{u} = \lambda\cdot(-\overrightarrow{u}) = -\lambda\cdot\overrightarrow{u}}$ $\boxed{\lambda\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \iff \left(\lambda = 0 \quad ou \quad \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\right)}$

Remarque : ainsi, $(-1)\cdot\overrightarrow{u}$ vaut $-\overrightarrow{u}$, l'opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Définition *Soient* $p \in \mathbb{N}^*$ *et* $\left(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \dots, \overrightarrow{u}_p\right) \in \mathrm{E}^p$. *On appelle* ***combinaison linéaire*** *de ces vecteurs tout vecteur* $\overrightarrow{u}$ *de la forme* $\boxed{\overrightarrow{u} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot \overrightarrow{u}_i}$ *avec* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$.

Remarque : c'est encore un élément de E grâce à la structure d'espace vectoriel. On dira ainsi qu'un $\mathbb{K}$-ev est **stable par combinaison linéaire**.

Exemple : tout complexe est combinaison linéaire de 1 et i.

2/ Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$

2.1) Définition et premières propriétés

Définition

Soit F *une partie de* E. *Si* F *est aussi un* $\mathbb{K}$*-ev, on dit que c'est un* ***sous-espace vectoriel de*** **E**.

Exemple : les droites et les plans passant par 0 sont des sous-ev de $\mathbb{R}^3$.

Théorème

Soient F *une partie de* E. *Alors* F *est un sous-ev de* E *si, et seulement si :*

1) $\overrightarrow{0} \in \mathrm{F}$
2) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathrm{F}^2,\ \lambda\cdot\overrightarrow{u} + \mu\cdot\overrightarrow{v} \in \mathrm{F}$

Exemples : $\mathrm{A} = \left\{(a+b, 2b, b-a) \middle/ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $\mathrm{B} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ x = 2z\right\}$ sont des sous-ev mais pas $\mathrm{C} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ x = 2z+1\right\}$ ni $\mathrm{D} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle/ |x| = 2z\right\}$.

Proposition

L'intersection de deux sous-ev de E *est également un sous-ev de* E.

Remarque : attention, c'est faux pour la réunion de deux sous-ev. Penser à $(0x) \cup (\mathrm{O}y)$.

2.2) Sous-espace engendré

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = \left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right\}$ une famille de p vecteurs de E.

Définition *L'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs est noté* $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right)$.

Proposition

- $\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right)$ *est un sous-ev de* E *et s'appelle le* ***sous-espace engendré par*** $\mathscr{F}$**.**
  On dit aussi que $\mathscr{F}$ *est une* ***famille génératrice*** *de cet espace vectoriel*
- *C'est l'intersection de tous les sous-ev de* E *contenant* $\mathscr{F}$.
- *C'est le plus petit sous-ev de* E *contenant* $\mathscr{F}$.

Remarque : établir que $\mathrm{F} = \operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ permet de prouver facilement que l'ensemble F est un sous-ev de E, donc un $\mathbb{K}$-ev. C'est le cas lorsque l'on résout un système linéaire par exemple.

3/ Familles finies de vecteurs

3.1) Familles libres

Définition

- *On dit que la famille* $\mathscr{F}$ *est* ***libre*** *si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \implies x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0}$$

  Dans ce cas, on dit que les vecteurs de $\mathscr{F}$ *sont* ***linéairement indépendants****.*
- *On dit que cette famille est* ***liée*** *dans le cas contraire, c'est-à-dire lorsque*

$$\boxed{\exists \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p \setminus \{(0,0,\ldots,0)\} \qquad \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}}$$

  Dans ce cas, un des vecteurs est combinaison linéaire des autres.

Remarque : la famille $\mathscr{F}$ est libre si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$ **est de rang p.** Cela signifie aussi que tout vecteur de $\operatorname{Vect}(\mathscr{F})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{F}$.

Proposition

- *Toute famille contenue dans une famille libre est libre.*
- *Toute famille contenant une famille liée est liée.*

Remarque : une famille libre ne peut pas contenir le vecteur nul ou deux vecteurs colinéaires.

3.2) Familles génératrices

Définition
- *On dit que la famille $\mathscr{F}$ est* ***génératrice*** *si* $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{E}$.
- *Dans ce cas, tout vecteur de* E *est combinaison linéaire des vecteurs de* $\mathscr{F}$:

$$\boxed{\forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{E} \quad \exists \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p \qquad \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i}}$$

Remarque : la famille $\mathscr{F}$ est génératrice si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{v}$ **est compatible quel que soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{E}$.**

Proposition

Toute famille contenant une famille génératrice est génératrice.

3.3) Bases d'un sous-espace vectoriel

Définition *Soit* F *un sous-ev de* E. *Une* ***base de F*** *est une famille libre et génératrice de* F.

Exemple : les familles étagées de n vecteurs de $\mathbb{K}^n$ sont des bases.

Théorème (admis)

Tout sous-ev de E *autre que* $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$ *admet une base.*

Remarque : par convention, on dit que $\emptyset$ est une base de $\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Proposition

Si l'on ajoute un vecteur à une base, elle devient liée.
Si l'on retranche un vecteur à une base, elle devient non-génératrice.

Théorème

Soit F *un sous-ev de* E. *La famille* $\mathscr{F}$ *est une base de* F *si, et seulement si,*

$$\boxed{\forall \overrightarrow{v} \in \mathrm{F} \quad \exists ! \left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right) \in \mathbb{K}^p \qquad \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i}}$$

On appelle alors $\left(x_1, x_2, \ldots, x_p\right)$ *les* ***coordonnées*** *du vecteur* $\overrightarrow{v}$ *dans la base* $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right\}$.

Remarque : la famille $\mathscr{F}$ est une base de E si, et seulement si, le système linéaire de n équations à p inconnues $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} x_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{v}$ **est de rang $p = n$.**

Méthode pratique pour déterminer Vect ($\mathscr{F}$)

On effectue un pivot sur les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{F}$ dans une base de E afin de faire apparaître une famille étagée puis éventuellement des vecteurs nuls.

- Les vecteurs de la famille étagée constituent une base du sous-ev engendré par $\mathscr{F}$.
- Si des vecteurs nuls apparaissent, la famille $\mathscr{F}$ est liée. Sinon, elle est libre.

En effet, $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}) = \mathrm{Vect}\left\{a_1\overrightarrow{x_1}, a_2\overrightarrow{x_2} + b_2\overrightarrow{x_1}, \dots, a_p\overrightarrow{x_p} + b_p\overrightarrow{x_1}\right\}$ pour $a_1 a_2 \dots a_p \neq 0$.

4/ Dimension d'un espace vectoriel

4.1) Notion de dimension

Théorème (de la dimension)

Toutes les bases d'un sous-ev E de $\mathbb{K}^n$ ont le même nombre d'éléments.
*Ce nombre est appelé **dimension de E** et noté $\dim(\mathrm{E})$.*

Exemples : $\dim\{0\} = 0$; $\dim(\mathbb{K}^n) = n$; $\dim(\mathbb{C}) = 2$ (en tant que $\mathbb{R}$-ev).

Remarque : on en déduit que tout $\mathbb{K}$-ev de dimension n est en bijection avec $\mathbb{K}^n$, via l'application qui associe à tout vecteur ses coordonnées dans une base donnée.

Proposition (familles libres)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

- *Toute famille libre de E peut se compléter en une base de E.*
- *Toute famille libre de E contient au plus n éléments.*
- *Une famille libre de E à n éléments est une base de E.*

Exemples : une famille de trois vecteurs du plan est liée ; cas des familles orthogonales.

Proposition (familles génératrices)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}$.

- *On peut extraire une base de E de toute famille génératrice de E.*
- *Toute famille génératrice de E contient au moins n éléments.*
- *Une famille génératrice de E à n éléments est une base de E.*

Exemple : trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace.

Remarque : si $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E et $\mathscr{L}$ une famille libre de E contenue dans $\mathscr{G}$, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{G}$. Ceci permet de construire des bases à notre convenance.

4. 2) Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème

Soient E *et* F *deux sous-ev de* $\mathbb{K}^n$ *avec* $F \subset E$.

1) *On a* $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
2) *Si* $\dim(F) = \dim(E)$, *alors* $F = E$.

Exemples :

❶ Les seuls sous-ev de $\mathbb{K}$ sont $\{0\}$ et $\mathbb{K}$.

❷ Un sous-ev de $\mathbb{R}^3$ strictement plus grand qu'un plan est égal à $\mathbb{R}^3$ entier.

Définition *Soit* $\mathscr{F} = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p}\right\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$.
On appelle ***rang*** *de cette famille la quantité* $\boxed{\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathscr{F}).}$

Remarque : ce rang se calcule grâce à un pivot sur les coordonnées dans une base de $\mathbb{K}^n$.

Proposition

Soit $\mathscr{F} = \left\{\overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{x_2}, \dots, \overrightarrow{x_p}\right\}$ *une famille de vecteurs de* $\mathbb{K}^n$.

1) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant p$ *avec égalité si, et seulement si,* $\mathscr{F}$ *est libre.*
2) $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant n$ *avec égalité si, et seulement si,* $\mathscr{F}$ *est génératrice.*

Exercices

Exercice 1.
Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; x-2y=0\right\} \qquad \left\{(x,x,x)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; x\in\mathbb{R}\right\} \qquad \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; |z|=1\right\}$$

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; xy=0\right\} \quad \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; x-2y=z\right\} \quad \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\Big/\; x^2+y^2+z^2=1\right\}$$

Exercice 2.
Soient $\overrightarrow{u}=(-1,2,-3)$, $\overrightarrow{v}=(0,1,-1)$, $\overrightarrow{w}=(2,-3,1)$ et $\overrightarrow{z}=(7,-9,8)$.
On pose $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right\}$ et $\mathrm{F}'=\mathrm{Vect}\left\{\overrightarrow{w},\overrightarrow{z}\right\}$. Déterminer $\mathrm{F}\cap\mathrm{F}'$.

Exercice 3.
Même question avec $\overrightarrow{u}=(2,3,-1)$, $\overrightarrow{v}=(-1,2,5)$, $\overrightarrow{w}=(3,1,-6)$ et $\overrightarrow{z}=(4,13,7)$.

Exercice 4.
L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une structure de $\mathbb{R}$- ev. La famille $\{1,\mathrm{i},1+\mathrm{i}\}$ est-elle libre ?

Exercice 5.
Dans chaque cas, la famille $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right\}$ est libre ou génératrice de $\mathbb{R}^3$?

1) $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$, $\overrightarrow{v}=(0,1,2)$ et $\overrightarrow{w}=(0,0,1)\in\mathbb{R}^3$
2) $\overrightarrow{u}=(8,4,2)$, $\overrightarrow{v}=(6,6,6)$ et $\overrightarrow{w}=(4,2,1)\in\mathbb{R}^3$.
3) $\overrightarrow{u}=(1,1,1$, $\overrightarrow{v}=(1,1,0)$ et $\overrightarrow{w}=(1,0,0)\in\mathbb{R}^3$.
4) $\overrightarrow{u}=(2,0,-1)$, $\overrightarrow{v}=(0,1,2)$ et $\overrightarrow{w}=(3,2,1)\in\mathbb{R}^3$.

Exercice 6.
Soit $\left\{\overrightarrow{u}_1,\ldots,\overrightarrow{u}_n\right\}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. On pose $\overrightarrow{v}_1=\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{v}_2=\overrightarrow{u}_1+\overrightarrow{u}_2,\ldots$
et $\overrightarrow{v}_n=\overrightarrow{u}_1+\cdots+\overrightarrow{u}_n$. Montrer que $\left\{\overrightarrow{v}_1,\ldots,\overrightarrow{v}_n\right\}$ est une famille libre.

Exercice 7.
Soit $\{x,y,z\}$ une famille libre de $\mathbb{K}^n$. Montrer que $\{x+y,y+z,z+x\}$ est également libre.

Exercice 8.
Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{K}^n$. tels que $\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)=\mathrm{Vect}\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}\right)$.
Montrer que la famille $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right\}$ est liée.

Exercice 9.
Soient les vecteurs $\overrightarrow{v}_1(2,0,1,3)$, $\overrightarrow{v}_2(1,1,0,-1)$, $\overrightarrow{v}_3(0,-2,1,5)$ et $\overrightarrow{v}_4(1,-3,2,9)$ de $\mathbb{R}^4$.
La famille $\left\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{v}_3,\overrightarrow{v}_4\right\}$ est-elle libre ? est-elle génératrice ?

Exercice 10. On considère les trois vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y,z)$, $\overrightarrow{v}(2,3,-1)$ et $\overrightarrow{w}(1,-1,-2) \in \mathbb{R}^3$.

1) Montrer que si $x=3$, $y=7$ et $z=0$, alors $\overrightarrow{u}$ appartient à $\text{Vect}\left(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right)$.
2) À quelles conditions sur x, y et z la famille $\left\{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}\right\}$ est-elle libre ?
3) Montrer que c'est alors une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11.
Montrer que les familles $\{(1,1);(1,0)\}$ et $\{(1,2);(2,-3)\}$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 12.
Donner des bases des ensembles des solutions des systèmes linéaires homogènes suivants :

(a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x+2y-z+t=0 \\ 2x+4y+z-2t=0 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

Exercice 13. Déterminer une base de $\text{Vect}\left(\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{v}_3\right)$ dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{v}_1(1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2(-3,0,3)$ et $\overrightarrow{v}_3(0,0,0)$.
2) $\overrightarrow{v}_1(1,1,1)$, $\overrightarrow{v}_2(1,2,3)$ et $\overrightarrow{v}_3(3,2,1)$.
3) $\overrightarrow{v}_1(1,2,4)$, $\overrightarrow{v}_2(6,6,6)$ et $\overrightarrow{v}_3(0,1,3)$.

Exercice 14. Calculer le rang de la famille $\left\{\overrightarrow{v}_1,\overrightarrow{v}_2,\overrightarrow{v}_3,\overrightarrow{v}_4\right\}$ pour :

1) $\overrightarrow{v}_1(0,1,0,1)$, $\overrightarrow{v}_2(1,-1,1,-1)$, $\overrightarrow{v}_3(1,-1,-1,1)$ et $\overrightarrow{v}_4(1,1,1,1)$.
2) $\overrightarrow{v}_1(1,-1,2,3)$, $\overrightarrow{v}_2(2,1,3,-1)$, $\overrightarrow{v}_3(1,-4,3,10)$ et $\overrightarrow{v}_4(0,-6,2,14)$.

Exercice 15.
Les familles suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

1) $\mathscr{F} = \{(1,-1,0);(2,-1,2)\}$
2) $\mathscr{F} = \{1,-1,0);(2,-1,2);(1,0,a)\}$
3) $\mathscr{F} = \{(1,1,3);(3,4,5);(-2,5,7);(8,-1,9)\}$
4) $\mathscr{F} = \{(2,1,5);(-1,-1,-3);(0,6,-2)\}$

Exercice 16.
Compléter si possible la famille $\mathscr{F}$ en une base de $\mathbb{R}^4$:

1) $\mathscr{F} = \{u,v,w\}$ avec $u=(1,2,-1,0)$, $v=(0,1,-4,1)$ et $w=(2,5,-6,1)$.
2) $\mathscr{F} = \{u,v,w\}$ avec $u=(1,0,2,3)$, $v=(0,1,2,3)$ et $w=(1,2,0,3)$.
3) $\mathscr{F} = \{u,v\}$ avec $u=(1,-1,1,-1)$ et $v=(1,1,1,1)$.

Exercice 17.
Soient $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z=0 \quad \text{et} \quad 2x+y+z-t=0\right\}$
et $\mathrm{G} = \text{Vect}\,\{(1,-2,1,1);(1,2,-3,1);(5,-3,-2,5)\}$

1) Calculer les dimensions de ces deux sous-ev de $\mathbb{R}^4$.
2) Montrer que $\mathrm{G} \subset \mathrm{F}$ puis que $\mathrm{G} = \mathrm{F}$.