XXIV – Les applications linéaires

On notera E, F et G les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$ (pour p, n et $m \in \mathbb{N}^*$).

1/ Définitions et premières propriétés

Définition

- *Une application* $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ *est appelée* ***application linéaire*** *si elle vérifie*

$$\boxed{\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in \mathrm{E}^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \qquad f\left(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}\right) = \lambda f\left(\overrightarrow{u}\right) + \mu f\left(\overrightarrow{v}\right)}$$

- *On note* $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *l'ensemble des applications linéaires de E dans F.*

Remarque : lorsque $\mathrm{F} = \mathbb{K}$, on parle de **forme linéaire** (comme l'intégrale sur $[\,a\,;b\,]$).

Définition

- *Une application linéaire de* E *dans* E *est appelée* ***endomorphisme de*** **E**.
  L'ensemble des endomorphismes de E *se note* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
- *Une application linéaire bijective est appelée* ***isomorphisme***.
- *Un endomorphisme bijectif de* E *est appelé* ***automorphisme de*** **E**.
  L'ensemble des automorphismes de E *se note* $\mathrm{GL}(\mathrm{E})$.

Proposition (combinaisons d'applications linéaires)

Soient f *et* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors* $f + g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $\lambda f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Remarque : l'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ a en fait une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition (compositions d'applications linéaires)

- *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *et* $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$, *alors* $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$.
- *Si* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ *est un isomorphisme, alors* $f^{-1} \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$.

Corollaire

La composée de deux automorphismes de E *et la réciproque d'un automorphisme de* E *sont également des automorphismes de E.*

2/ Noyaux et images

On considère dans cette section une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

2.1) Définition et premières propriétés

Définition

- *On appelle* ***noyau de f*** *l'ensemble* $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathrm{E} \,\middle/\, f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}_{\mathrm{F}}\right\}$.
- *On appelle* ***image de f*** *l'ensemble* $\mathrm{Im}(f) = f(\mathrm{E}) = \left\{f\left(\overrightarrow{u}\right) \in \mathrm{F} \,\middle/\, \overrightarrow{u} \in \mathrm{E}\right\}$.

Proposition

$\mathrm{Ker}(f)$ *est un sous-ev de* E *et* $\mathrm{Im}(f)$ *est un sous-ev de* F.

Théorème

- f *est injective si, et seulement si,* $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\overrightarrow{0}_{\mathrm{E}}\right\}$.
- f *est surjective si, et seulement si,* $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{F}$.

2.2) Caractérisation et étude pratique

Déterminer Ker(f)

Par définition, $\boxed{\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f) \iff f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}}$

De ce fait, **Ker(f) est l'ensemble des solutions dans E du système linéaire $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{0}$**

Déterminer Im(f)

Par définition, $\boxed{\overrightarrow{v} \in \mathrm{Im}(f) \iff \exists \overrightarrow{u} \in \mathrm{E},\ \overrightarrow{v} = f\left(\overrightarrow{u}\right)}$

De ce fait, **Im(f) est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{v} \in \mathrm{F}$ pour lesquels le système linéaire $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v}$ est compatible**

2.3) Équations linéaires

Définition *Une **équation linéaire** est une équation du type* $\boxed{u(x)=b}$ *où* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $b \in \mathrm{F}$.

Théorème

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $b \in \mathrm{F}$. *On note* $\mathscr{S}$ *l'ensemble des solutions de l'équation* $u(x)=b$ *et* $\mathscr{S}_0$ *l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée* $u(x)=0$.

- *L'ensemble* $\mathscr{S}_0$ *est un sous-ev de* E. *Il est donc non vide.*
- *Si* $\mathscr{S} \neq \emptyset$, *on considère* $x_0 \in \mathscr{S}$ *: alors* $\mathscr{S} = \left\{x_0 + y \,\middle/\, y \in \mathscr{S}_0\right\}$.

Remarque : on retrouve ici la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire ... que de souvenirs !

3/ Applications linéaires en dimension finie

On considère dans cette section une application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

3.1) Applications linéaires et familles de vecteurs

Théorème

Soient $\left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_p}\right\}$ *une base de* E *et* $\left\{\overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_2}, \ldots, \overrightarrow{f_p}\right\}$ *une famille de* F. *Il existe alors une unique application linéaire* $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *telle que* $u\left(\overrightarrow{e_i}\right) = \overrightarrow{f_i}$ *pour tout* $i \in [\![1\,;p]\!]$.

Remarque : une application linéaire est ainsi entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ. Mieux : cette image nous donne les propriétés de l'application linéaire.

Théorème

Soit $\mathscr{B}$ *une base de* E.

1) *On a* $\boxed{\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\, f(\mathscr{B}).}$
2) f *est injective si, et seulement si, la famille* $f(\mathscr{B})$ *est libre dans* F.
3) f *est surjective si, et seulement si, la famille* $f(\mathscr{B})$ *est génératrice de* F.
4) f *est bijective si, et seulement si, la famille* $f(\mathscr{B})$ *est une base de* F.

Remarque : on commencera par effectuer un pivot sur les vecteurs de la famille $f(\mathscr{B})$ afin de voir si elle est libre et de faire apparaître une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3.2) Rang d'une application linéaire

Définition *On appelle **rang de f** le réel* $\boxed{\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im}(f).}$

Proposition

On a $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{E})$ *et* $\operatorname{rg}(f) \leqslant \dim(\mathrm{F})$.

Remarque : si $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{e_1}, \dots, \overrightarrow{e_p}\right\}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}\left\{f(\overrightarrow{e_1}), \dots, f(\overrightarrow{e_p})\right\}$.

Théorème

- *f est injective si, et seulement si,* $\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathrm{E})$.
- *f est surjective si, et seulement si,* $\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathrm{F})$.
- *f est bijective si, et seulement si,* $\operatorname{rg}(f) = \dim(\mathrm{F}) = \dim(\mathrm{E})$.

3.3) Le théorème du rang et ses conséquences

Théorème (du rang)

On a $\boxed{\dim(\mathrm{E}) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker} f).}$

Corollaire *Si* $\dim(\mathrm{E}) = \dim(\mathrm{F})$, *alors* $\boxed{f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}}$

4/ Matrice d'une applications linéaire

Soient $\mathscr{B} = \left\{e_1, \dots, e_p\right\}$, $\mathscr{B}' = \{f_1, \dots, f_n\}$ et $\mathscr{B}'' = \{g_1, \dots, g_m\}$ des bases de E, F et G.

4.1) Définition et propriétés fondamentales

Définition *Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: on appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$** la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne fournit les coordonnées du vecteur $u\left(e_j\right)$ dans la base $\mathscr{B}'$ pour tout $j \in [\![1\,; p]\!]$.*

Ainsi, l'écriture $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ signifie que $u\left(e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\, f_i$ pour $1 \leqslant j \leqslant p$.

Exemple : l'endomorphisme Id_E a pour matrice I_p.

Corollaire

Les vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ *sont les coordonnées des vecteurs de* $u(\mathscr{B})$.

Remarque : par conséquent, ils forment une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Proposition

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$.
Alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u+v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ *et* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\lambda u) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$.

Remarque : l'application $u \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ est un isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition (Écriture matricielle d'une application linéaire)

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *une application linéaire et* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *sa matrice.*
Pour tout $x \in \mathrm{E}$, *on pose* $y = u(x) \in \mathrm{F}$ *et l'on note :*

- $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *la matrice colonne des coordonnées de* x *dans* $\mathscr{B}$.
- $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *la matrice colonne des coordonnées de* y *dans* $\mathscr{B}'$.

Alors : $\boxed{\mathrm{Y} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}}$

Remarque : c'est la notation la plus couramment adoptée car elle est très pratique pour les calculs. Cependant, tout ceci va fortement dépendre des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ choisies.

4.2) Matrice d'une composée

Proposition

Pour tous $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ *et* $u \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$, *on a* $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(u) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(v).}$

Remarque : on conserve l'ordre de l'écriture, bien que u soit appliquée **après** v.

Théorème

Pour tout $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, *la matrice* $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$ *est inversible si, et seulement si,* u *est un isomorphisme. Dans ce cas, son inverse est* $\boxed{\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(u^{-1}\right).}$

5/ Rang d'une matrice

5.1) Définition et premières propriétés

Définition *Soit* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *On appelle* ***rang de* A** *le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.*

Remarque : on calcule le rang en effectuant un pivot sur les vecteurs colonnes de la matrice. Ceci fait également apparaître une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ où u est le morphisme associé à A.

Théorème

- *Le rang d'une matrice de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *est le rang du morphisme associé de* $\mathbb{K}^p$ *dans* $\mathbb{K}^n$.
- *Ils sont tous deux inversibles lorsque leur rang* r *vérifie* $r = n = p$.

Proposition

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. *Alors* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) \leqslant \min(n, p)$ *et* $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}\,({}^t\mathrm{A})$.
En particulier, le rang d'une matrice est égal au rang de ses vecteurs lignes.

5.2) Opérations élémentaires sur les matrices

Définition *On appelle* ***opérations élémentaires sur les matrices*** *les actions suivantes :*

1) *L'échange de deux lignes ou de deux colonnes.*
2) *La multiplication d'une ligne ou d'une colonne par un scalaire non nul.*
3) *L'addition d'une ligne ou d'une colonne à une autre.*

Remarque : ce sont les opérations que l'on effectue pour résoudre les systèmes d'équations et pour calculer les rangs de familles de vecteurs.

Théorème

Les opérations élémentaires sur les matrices conservent le rang.

Ainsi, pour déterminer le rang d'une matrice, on va essayer de se ramener à une matrice échelonnée à l'aide d'opérations élémentaires : c'est encore une fois le pivot de Gauss. Rien de surprenant ici puisque le rang d'une matrice est simplement le rang du système associé.

Exercices

Exercice 1.
Examiner si les applications $f : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ qui suivent sont linéaires.
Déterminer les images et les noyaux de celles qui le sont effectivement.

1) $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2, \mathrm{F} = \mathbb{R}^3,\ f : (x, y) \longmapsto (2x - y, 3y, 1 - x)$
2) $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2, \mathrm{F} = \mathbb{R},\ f : (x, y) \longmapsto xy$
3) $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3, \mathrm{F} = \mathbb{R},\ f : (x, y, z) \longmapsto x + y + 2z$
4) $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2, \mathrm{F} = \mathbb{R},\ f : (x, y) \longmapsto x + 2y + 1$

Exercice 2. Même exercice :

1) $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$- ev, et $f : z \longmapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ fixé.
2) $\mathrm{E} = \mathbb{C}$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}$ sont des $\mathbb{R}$-ev et $f : z \longmapsto a\ \mathrm{Re}(z) + b\ \mathrm{Im}(z)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
3) $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f : u \longmapsto u'' - 3u' + 2u$.

Exercice 3.
Déterminer des bases des images et des noyaux des applications linéaires suivantes :

1) $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - y + z, x + y + 3z, x - z) \end{array} \right.$
2) $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y + t, y - z + 2t, x + z) \end{array} \right.$
3) $h : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y - 3z, x + y + z) \end{array} \right.$

Exercice 4. Même exercice :

1) $f : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (-y + z, x - 2y + z, x - z) \end{array} \right.$
2) $g : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & (x + y, y - z, x + z) \end{array} \right.$
3) $h : \left| \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, y + z) \end{array} \right.$

Exercice 5.

1) Montrer qu'il existe un unique $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tq $f(1, 0) = (1, 1, 0)$ et $f(0, 1) = (0, 1, 1)$.
   Déterminer son expression, ainsi que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2) Procéder de même avec $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ tel que $f(2, 1) = (0, 1, 2)$ et $f(1, 2) = (2, 1, 0)$.

Exercice 6.
Soient E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tq $f^2 - 4f + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = 0$.
Montrer que $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et exprimer f^{-1} en fonction de f.

Remarque : *pour un endomorphisme f, la notation f^2 signifie $f \circ f$.*

Exercice 7.
Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ trois espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$.

1) Démontrer que $g \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}\, g$.
2) Démontrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
3) Démontrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$.
4) Démontrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = f^{-1}(\mathrm{Ker}\, g)$

Exercice 8.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de E.
Prouver que : $\mathrm{Ker}(f^2) = \mathrm{Ker}(f) \iff \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

Dans les trois exercices suivants, on a $\mathrm{E} = \mathbb{K}^n$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Exercice 9.

1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f) \iff (f^2 = 0 \quad \text{et} \quad n = 2\ \mathrm{rg}(f))$.
2) On suppose que $f^3 = 0$. Montrer que $rg(f) + \mathrm{rg}(f^2) \leqslant n$.

Exercice 10.
On suppose que $f^n = 0$ mais $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\left\{x_0, f(x_0) \dots, f^{n-1}(x_0)\right\}$ soit une base de E.

Exercice 11.
On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\left\{f(x_0), \dots, f^n(x_0)\right\}$ soit une base de E.
Démontrer que f est un automorphisme de E.

******* *Un peu de calcul matriciel ...* *******

Exercice 12. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1) Déterminer l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
2) Prouver qu'il est stable par combinaison linéaire et par produit.

Exercice 13. Même exercice avec $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 14. Soit $\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \middle/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

1) Montrer que E est stable par combinaison linéaire et par produit.
2) Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 15.
Mêmes questions avec $\mathrm{E} = \left\{ \mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \middle/ (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Exercice 16. Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

********* Passons enfin aux matrices des applications linéaires *********

Exercice 17.
Déterminer les matrices des applications linéaires suivantes :

1) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0) = (0,0)$, $f(0,1,0) = (1,0)$ et $f(0,0,1) = (0,2)$.
2) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $f(1,0) = (1,-2,0)$ et $f(0,1) = (3,1,-1)$.

Exercice 18.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,y) \longmapsto (5x+4y, 3x+6y)$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B} = \left\{ \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath} \right\}$, où $\overrightarrow{\imath} = (1,1)$ et $\overrightarrow{\jmath} = (4,-3)$.

Exercice 19.
Même question avec $\overrightarrow{\imath} = (4,3)$, $\overrightarrow{\jmath} = (1,1)$ et $f : (x,y) \longmapsto (4x-4y, 3x-3y)$.

Exercice 20.
Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 21.
Même exercice avec $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22.
On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ de sa base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f tel que $\mathrm{Ker}\, f = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \middle/ x+2y+z=0 \text{ et } x+3y-t=0 \right\}$, $f(e_1) = e_1 - e_2 + e_3$ et $f(2e_1 + 3e_4) = e_2$. *On pourra chercher sa matrice dans la base canonique.*

Exercice 23.
En procédant de la même manière, déterminer tous les endomorphismes f tels que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left\{ e_2 - 2e_3, e_1 + e_4 \right\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \left\{ (x,y,z,t) \middle/ x+2y-3z=0 \text{ et } x+t=0 \right\}$.

******** *On finit avec des changements de base* ********

Exercice 24.
Soient $\overrightarrow{e_1} = (2,1)$ et $\overrightarrow{e_2} = (3,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique.

1) Vérifier que $\mathscr{B}' = \left\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
2) Déterminer les coordonnées dans la base $\mathscr{B}'$ du vecteur $\overrightarrow{u} = (-3,2)$.

Exercice 25.
L'espace $\mathrm{E} = \mathbb{K}^3$ est muni de sa base canonique $\mathscr{B}$. On définit la nouvelle base $\mathscr{B}' = \left\{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right\}$ où $\overrightarrow{\imath} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{\jmath} = (1,-1,0)$ et $\overrightarrow{k} = (-2,1,0)$. Soit enfin $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Sachant que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Exercice 26.
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de base $\mathscr{B} = \left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}\right\}$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Donner la matrice de f dans la base $\left\{\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{w} - \overrightarrow{u}\right\}$.
2) Même question dans la base $\left\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}\right\}$.

Exercice 27.
Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

❶ On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre de f** s'il existe un vecteur **non nul** $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ tel que $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}$.

❷ On dit que $\overrightarrow{u} \in \mathrm{E}$ est un **vecteur propre de f associé à la valeur propre λ** si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}$.

❸ On appelle enfin **sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ** l'ensemble $\mathrm{E}_\lambda(f) = \left\{\overrightarrow{u} \in \mathrm{E} \,\middle/\, f\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{u}\right\}$.

1) Montrer que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}) \neq \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
2) Si λ est une valeur propre de f, montrer que $\mathrm{E}_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda\, \mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
   Que peut-on alors dire de cet ensemble ?
3) Montrer que λ est une valeur propre de f si, et seulement si, $\mathrm{rg}(f - \lambda\ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) < \dim(\mathrm{E})$.
4) Application : soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
   (a) Déterminer les valeurs propres de f en utilisant la question 3.
   (b) Déterminer les sous-espaces propres associés en utilisant la question 2.
   On donnera une base de chaque espace propre.
   (c) Vérifier que la réunion de ces bases fournit une base de $\mathbb{R}^3$.
   Quelle est alors la matrice de f dans cette nouvelle base ?