III – Le langage mathématique

1/ Notions de logique

1.1) Propositions, assertions

Définition *On appelle **proposition** ou **assertion** un énoncé pouvant être soit vrai, soit faux.*

Définition *On dira que deux assertions P et Q sont **équivalentes** si elles sont toujours soit simultanément vraies, soit simultanément fausses. On note alors $P \iff Q$.*

Remarque : ainsi, ce symbole « équivalence » s'utilisera entre des équations, des inéquations ou des phrases, mais **jamais entre des nombres ou des expressions algébriques.**

1.2) Connecteurs élémentaires

On peut, à partir d'assertions, en fabriquer de nouvelles à l'aide de connecteurs logiques. Soient donc P et Q deux assertions.

Définition *« **NON P** » est l'assertion qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.*

Proposition

Les assertions P et NON (NON P) sont équivalentes.

Définition *« **P ET Q** » est l'assertion qui est vraie lorsque les deux assertions sont simultanément vraies, et fausse sinon.*

Définition *« **P OU Q** » est l'assertion qui est vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.*

Remarque : si P et Q sont simultanément vraie, P OU Q est encore vraie.

Les valeurs prises par ces nouvelles assertions se résument dans des *tables de vérité*, que l'on pourra utiliser pour démontrer les propositions énoncées dans la suite du cours.

P	NON P	NON (NON P)
V	F	V
F	V	F

P	Q	P ET Q	P OU Q
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

1.3) Implications et équivalences

Définition « $P \implies Q$ » est l'assertion qui est vraie lorsque Q est vraie dès que P l'est.

Attention, c'est une notion très délicate : ainsi, $P \implies Q$ est vraie dès que P est fausse. Le plus simple est de garder en tête le cas où l'implication est fausse : cela se produit lorsque P est vraie et Q est fausse puisque c'est le seul cas contredisant la définition. Par conséquent, $P \implies Q$ est vraie lorsque P est fausse ou Q est vraie.

Remarques :

- ❶ On dira que Q est une **condition nécessaire** pour P.
- ❷ On dira également que P est une **condition suffisante** pour Q.
- ❸ Si P est fausse ou si Q est vraie, l'assertion « $P \implies Q$ » est toujours vraie. Par exemple, « Les éléphants roses ont des ailes » et « S'il fait beau, les triangles ont trois côtés ».

Définition « $P \iff Q$ » est l'assertion qui est vraie lorsque les assertions P et Q sont simultanément vraies ou fausses.

P	Q	$P \implies Q$	$P \iff Q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

Proposition

- Les assertions « $P \implies Q$ » et « (NON P) OU Q » sont équivalentes.
- Les assertions « $P \iff Q$ » et « $(P \implies Q) \text{ ET } (Q \implies P)$ » sont équivalentes.

2/ L'art de la démonstration

2.1) Règles logiques

Proposition (règles de simplification)

Soit P une assertion. Alors :

- P ET (NON P) équivaut à FAUX
- P OU (NON P) équivaut à VRAI.
- P OU VRAI équivaut à VRAI.
- P OU FAUX équivaut à P .
- P ET VRAI équivaut à P .
- P ET FAUX équivaut à FAUX.

Proposition (associativité et distributivité)

Soient P , Q et R trois assertions. Alors :

- $(P$ ET $Q)$ ET R équivaut à P ET $(Q$ ET $R)$.
- $(P$ OU $Q)$ OU R équivaut à P OU $(Q$ OU $R)$.
- P ET $(Q$ OU $R)$ équivaut à $(P$ ET $Q)$ OU $(P$ ET $R)$.
- P OU $(Q$ ET $R)$ équivaut à $(P$ OU $Q)$ ET $(P$ OU $R)$.

Remarques :

- ❶ Les deux premières propriétés sont les **associativités** de la conjonction et de la disjonction ; elles montrent que les parenthèses sont superflues. Les deux suivantes sont les **distributivités** de la conjonction par rapport à la disjonction, et réciproquement.
- ❷ Les assertions « P ET $(Q$ OU $R)$ » et « $(P$ ET $Q)$ OU R » ne sont pas équivalentes. Attention à la position des parenthèses dans de tels cas.

Proposition (règles de négation)

Soient P et Q deux assertions. Alors :

- NON $(P$ ET $Q)$ équivaut à $(NON$ $P)$ OU $(NON$ $Q)$
- NON $(P$ OU $Q)$ équivaut à $(NON$ $P)$ ET $(NON$ $Q)$
- NON $(P \implies Q)$ équivaut à P ET $(NON$ $Q)$
- NON $(P \iff Q)$ équivaut à $(P$ ET $(NON$ $Q))$ OU $(Q$ ET $(NON$ $P))$

Proposition (implications et équivalences)

Soient P, Q et R trois assertions. Alors :

- $P \implies Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse.
- $P \implies Q$ équivaut à $(\text{NON } Q) \implies (\text{NON } P)$. C'est la *contraposition*.
- $P \iff Q$ équivaut à $(\text{NON } P) \iff (\text{NON } Q)$.
- Si $P \implies Q$ et $Q \implies R$ alors $P \implies R$.

2.2) Schémas classiques

La plupart des démonstrations suivent les mêmes schémas.

Voici une liste (à peu près exhaustive) de ceux que l'on croquera :

- **Démontrer « A ET B »**
Montrer l'assertion A et l'assertion B, l'ordre n'ayant aucune importance.
- **Démontrer « A OU B »**
Montrer que l'une (au moins) des assertions est vraie. Par exemple, on suppose que A est fausse et on en déduit que B est nécessairement vraie.
- **Démontrer « A $\implies$ B »**
Supposer que A est vraie. Montrer que B est vraie.
- **Démontrer « A $\implies$ B » par contraposée**
Supposer que B est fausse. Montrer que A est fausse.
- **Démontrer B sachant que « A $\implies$ B »**
Montrer que A est vraie.
- **Démontrer C sachant que « A $\implies$ C » et « B $\implies$ C »**
Montrer que « A OU B » est vraie.
- **Démontrer « A $\iff$ B »**
Montrer que « A $\implies$ B » et « B $\implies$ A ».
- **Démontrer A par l'absurde.**
Supposer que A est fausse. Dédire une contradiction avec les hypothèses de départ.

Exercices

1/ Notions de logique

Dans les exercices qui suivent, P, Q et R sont trois assertions.

Exercice 1.

On note P : « les chiens aboient » et Q : « la caravane passe ».

Exprimer en fonction de P et / ou de Q les propositions suivantes :

- 1) Les chiens n'aboient pas.
- 2) Si la caravane passe, alors les chiens aboient.
- 3) La caravane ne passe pas ou les chiens aboient.
- 4) Les chiens n'aboient pas et la caravane ne passe pas.

Exercice 2.

Simplifier l'assertion « (NON P ET Q) OU (NON P ET NON Q) OU (P ET Q) ».

On pourra utiliser une table de vérité afin de reconnaître une assertion plus simple.

Exercice 3.

Soit a un réel. Écrire et simplifier les négations des propositions suivantes :

- (1) $a \leq -2$ ou $a \geq 3$ (2) $a \leq 5$ et $a > -1$ (3) $a \leq 5$ et $3 > a$

Exercice 4.

On pose P : « je pars », Q : « tu restes » et R : « il n'y a personne ».

Traduire en français usuel (et lisible) les propositions suivantes :

$$(P \text{ ET NON } Q) \implies R \qquad (\text{NON } P \text{ OU NON } Q) \implies \text{NON } R$$

Exercice 5.

Écrire la négation de chacune des assertions suivantes :

- 1) « NON P ET Q » puis « NON P OU Q ».
- 2) « P OU (Q ET R) » puis « P ET (Q OU R) ».
- 3) « $P \implies (\text{NON } Q)$ » puis « $P \iff Q$ ».
- 4) « $(\text{NON } P \text{ ET } Q) \implies R$ ».

Exercice 6.

Montrer que les assertions suivantes sont toujours vraies :

- 1) « $(P \text{ ET } Q) \implies P$ »
- 2) « $P \implies (P \text{ OU } Q)$ »
- 3) « $P \text{ OU } (P \implies Q)$ »

2/ L'art de la démonstration

Exercice 7.

En raisonnant par contraposition, montrer que :

- 1) $x \neq y \implies \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}$ si x et y sont deux réels distincts de 1.
- 2) Si l'entier $n^2 - 1$ n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair.
- 3) Si l'entier a^2 n'est pas un multiple de 16, alors $a/2$ n'est pas un entier pair.

Exercice 8.

En raisonnant par l'absurde, montrer que :

- 1) Si x est un nombre réel tel que $x \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$, alors $x \leq 0$.
- 2) Si n est le carré d'un entier non nul, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 9.

On range $n + 1$ paires de chaussettes dans n tiroirs.

Montrer qu'au moins l'un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

Exercice 10.

Soient A, B et C trois points non alignés.

Montrer que les médiatrices des segments [AB] et [AC] sont sécantes.