IV – Calculs de limites et de dérivées

1/ Calculs de limites

Dans toute cette section, f est une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a est un point ou une borne (finie ou non) de I. On dira alors que f **est définie au voisinage de a**.

1.1) Notion de limite

Définition (intuitive)

- *On dit que x tend vers $a \in \mathbb{R}$ si les valeurs prises par x sont aussi proches de a qu'on le désire.*
- *On dit que x tend vers $+\infty$ si les valeurs prises par x sont aussi grandes qu'on le désire.*
- *On dit que x tend vers $-\infty$ si les valeurs prises par x sont aussi petites qu'on le désire.*

Soit alors $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ si ***$f(x)$ tend vers ℓ lorsque x tend vers a****.*

Définition

- *La* ***limite à gauche de f en a*** *est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et que $x < a$.*
  On la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.
- *La* ***limite à droite de f en a*** *est la limite de $f(x)$ quand x tend vers a et que $x > a$.*
  On la note $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$ ou encore $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

1.2) Limites usuelles

On suppose dans cette sous-section que $a \in \mathrm{I}$: la fonction f est donc définie en a.

Théorème (limite en un point a du domaine de définition)

Si la fonction f est composée de fonctions usuelles, alors $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a).}$

Proposition (prolongement en un point)

Soit g une fonction définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I} \setminus \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, alors $\boxed{\lim\limits_{x \to a} g(x) = f(a).}$

Théorème (limites aux bornes du domaine de définition)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé.

- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0.}$
- *Si n est pair, alors* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^n} = +\infty.}$
- *Si n est impair, alors* $\boxed{\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty}$, $\boxed{\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty.}$
- $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty}$ *et* $\boxed{\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0}$.

1.3) Opérations algébriques

(a) Limite d'une somme

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

F.I. : « $\infty - \infty$ »

(b) Limite d'un produit

$\lim f$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim fg$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

F.I. : « $0 \times \infty$ »

(c) Limite d'un inverse

$\lim f$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim 1/f$	$1/\ell$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

F.I. : « $\frac{1}{0}$ »

(d) Limite d'un quotient

$\lim f$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-	$\ell' > 0$ ou 0^+	$\ell' < 0$ ou 0^-
$\lim f/g$	ℓ/ℓ'	0	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

F.I. : « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ »

1.4) Techniques d'étude des formes indéterminées

Forme indéterminée « $\infty - \infty$ »

On essaye de factoriser par le plus gros terme (idéalement, une puissance) de la somme.

Forme indéterminée « $1/0$ »

On détermine le signe du dénominateur.

Forme indéterminée « ∞/∞ »

On factorise *si possible* au numérateur et au dénominateur par les plus gros termes (des puissances induisant les limites infinies), que l'on simplifie ensuite.

Forme indéterminée « $0/0$ »

On procède de même, en factorisant par les termes provoquant les limites nulles.

Théorème (croissances comparées)

Pour tout réel $\alpha > 0$, on a :

$\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \mathrm{e}^x = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^\alpha} = +\infty}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0}$

1.5) Théorèmes de comparaison

Théorème (de passage à la limite)

Soient f et g deux fonctions ayant des limites finies en a, et telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a.
Alors $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x).}$

Théorème (des gendarmes)

Soient f, g et h des fonctions telles que $f \leqslant g \leqslant h$ au voisinage de a.
On suppose en outre que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \in \mathbb{R}$.
Alors la fonction g admet une limite en a et $\boxed{\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell.}$

Remarque : cette fois, le théorème permet de prouver l'existence d'une limite.

Corollaire *Soient f, g deux fonctions et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que $\left|f - \ell\right| \leqslant g$ au voisinage de a.*
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, alors $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell.}$

Théorème (de minoration / de majoration)

Soient f et g deux fonctions telles que $f \leqslant g$ au voisinage de a.

1) *Si* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.
2) *Si* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, *alors* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

1.6) Composition des limites

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ telles que $\boxed{f(x) \in \mathscr{D}' \text{ pour tout } x \in \mathscr{D}}$.
La ***fonction composée de f par g*** *est la fonction* $g \circ f : x \longmapsto g\big(f(x)\big)$ *définie sur $\mathscr{D}$.*

Théorème

Soient I *et* J *deux intervalles de* $\mathbb{R}$, *a un point ou une borne de* I, *b un point ou une borne* J, *et ℓ un réel, $-\infty$ ou $+\infty$. On considère deux fonctions f définie sur* I, *g définie sur* J, *telles que :*

❶ $f(x) \in \mathrm{J}$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$ ❷ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ ❸ $\lim\limits_{y \to b} g(y) = \ell$

Alors la fonction $g \circ f$ est définie sur I *et* $\boxed{\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell}$.

2/ Calculs de dérivées

2.1) Définition

Définition *Soit $\mathscr{C}$ une courbe du plan. On dit que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite* (T) *pour* ***tangente en*** **A** $\in \mathscr{C}$ *si les droites* (AM), *pour* $\mathrm{M} \in \mathscr{C} \setminus \{\mathrm{A}\}$, *admettent la droite* (T) *pour position limite lorsque le point* M *tend vers* A.

Définition *Soient* I *un intervalle et f une fonction définie sur* I.

- *On dit que f est* ***dérivable en $a \in$*** **I** *lorsque la quantité* $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ *admet une limite* ***finie*** *en a, notée $f'(a)$: celle-ci s'appelle alors le* ***nombre dérivé en a***.
- *On dit que f est* ***dérivable sur*** **I** *lorsqu'elle est dérivable en tout point de* I.

Cas des fonctions de plusieurs variables

Une fonction f dépendant de deux variables x et y n'admet pas une dérivée, mais deux **dérivées partielles** par rapport à x et y notées respectivement $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

2. 2) Dérivées usuelles

Théorème

Voici les expressions des dérivées des fonctions usuelles actuellement connues.
Faire attention aux ensembles de définition et de dérivabilité de ces fonctions.

$f(x)$	x^α	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$-\sin x$	$\cos x$	$1+\tan^2 x = 1/\cos^2 x$	e^x	$1/x$

Corollaire $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^h - 1}{h} = 1}$ $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1}$

2. 3) Opérations sur les dérivées

Théorème

Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$.
Alors les fonctions $f+g$, fg et kf sont dérivables sur l'intervalle I et l'on a

$$\boxed{(f+g)' = f' + g'} \qquad \boxed{(kf)' = kf'} \qquad \boxed{(fg)' = f'g + fg'}$$

Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $1/g$ et f/g sont dérivables sur I et

$$\boxed{(1/g)' = -g'/g^2} \qquad \boxed{(f/g)' = (f'g - fg')/g^2}$$

2. 4) Dérivées des composées

Théorème

Soient deux fonctions, f définie sur un intervalle I et g définie sur un intervalle J, telles que $f(x) \in \mathrm{J}$ pour tout $x \in \mathrm{I}$. On suppose que f est dérivable en $a \in \mathrm{I}$ et que g est dérivable en $f(a) \in \mathrm{J}$. Alors la fonction composée $g \circ f$ dérivable en a et $\boxed{(g\circ f)'(a) = f'(a) \times g'[f(a)].}$

Remarque : si f est dérivable sur l'intervalle I et que g est dérivable sur l'intervalle J, alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $\boxed{(g\circ f)' = f' \times g' \circ f.}$

Application à la recherche de primitives

Dans le cas d'une fonction un peu tordue, il faut souvent reconnaître une expression de la forme u'/u, $u' \times u^\alpha$ ou bien $u' \times (v' \circ u)$ afin de faire apparaître la dérivée d'une fonction composée.

3 / Relations de comparaison

3.1) Fonctions négligeables

Définition *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, *on dit que* ***f est négligeable devant g au voisinage de a.***
Ceci se note $f = \underset{x\to a}{o}(g)$.

Résultats sur les puissances et croissances comparées

$x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^\beta)$ pour $\alpha<\beta$	$x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^x)$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$	$\ln(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(x^\alpha)$ pour $\alpha>0$
$x^\beta = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^\alpha)$ pour $\alpha<\beta$		$\ln x = \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(1/x^\alpha)$ pour $\alpha>0$
$x^\alpha = \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}(x^\beta)$ pour $\alpha<\beta$	$\mathrm{e}^x = \underset{x\to-\infty}{\mathrm{o}}(x^\alpha)$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$	

Proposition (règles de manipulation)

- *Si* $f = \underset{x\to a}{o}(g)$ *et* $g = \underset{x\to a}{o}(h)$, *alors* $f = \underset{x\to a}{o}(h)$.
- *Si* $f = \underset{x\to a}{o}(h)$ *et* $g = \underset{x\to a}{o}(k)$, *alors* $fg = \underset{x\to a}{o}(hg) = \underset{x\to a}{o}(hk)$.
- *Si* $f = \underset{x\to a}{o}(h)$ *et* $g = \underset{x\to a}{o}(h)$, *alors* $(\alpha f+\beta g) = \underset{x\to a}{o}(h)$ *pour tous* $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

Théorème

Si $f = \underset{x\to a}{o}(g)$ *et que* g *est bornée au voisinage de a, alors* $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

3.2) Fonctions équivalentes

Définition *Si* $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, *on dit que* ***f est équivalente à g au voisinage de a.***
Ceci se note $f \underset{x\to a}{\sim} g$.

Equivalents usuels

$\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\mathrm{e}^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} x^2/2$

Proposition (équivalent d'une somme)

Si $f = g + \underset{x\to a}{o}(g)$*, alors* $f \underset{x\to a}{\sim} g$.

Proposition (obtention d'équivalents)

Si f *est dérivable en* a *et que* $f'(a) \neq 0$*, alors* $\boxed{f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} (x-a)f'(a).}$

Théorème (fondamental)

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe et que* $f \underset{x\to a}{\sim} g$*, alors* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Remarque : la réciproque est fausse lorsque la limite est **nulle** ou **infinie**. C'est justement là que la notion d'équivalent apporte des renseignements supplémentaires. En effet, des équivalents simples permettent de comparer les vitesses de convergence ou de divergence.

De surcroît, les notations $f \underset{x\to a}{\sim} 0$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} +\infty$ n'ont aucun sens.

Proposition (manipulation des équivalents)

- *On a* $f \underset{x\to a}{\sim} g \iff g \underset{x\to a}{\sim} f \iff f - g = \underset{x\to a}{o}(g) \iff f = g + \underset{x\to a}{o}(g)$
- *Si* $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *et* $g \underset{x\to a}{\sim} h$*, alors* $f \underset{x\to a}{\sim} h$.
- *Si* $f \underset{x\to a}{\sim} h$ *et* $g \underset{x\to a}{\sim} k$*, alors* $fg \underset{x\to a}{\sim} hk$.
- *Si* $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *alors* $f^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g^\alpha$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque : on ne peut **ni additionner ni composer** les équivalents ! Si la tentation vous prend, il faudra y résister en utilisant des fonctions négligeables (cf. dernier paragraphe).

Attention, **les notations $f(x) \sim 0$ ou $f(x) \sim +\infty$ n'ont aucun sens.**

3.3) Application aux formes indéterminées

Théorème (essentiel)

Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ *alors* $f = g + \underset{x\to a}{o}(g)$.

On peut dans ce cas **remplacer la fonction f par $g + \underset{x\to a}{o}(g)$** et utiliser les règles de manipulation précédentes afin de simplifier une expression dans laquelle elle intervient.

Exercices

1/ Calculs de limites

Exercice 1.
Étudier les limites des expressions suivantes en $+\infty$:

(a) $x^2 - 5x + 6$ (b) $\sqrt{x^2+1} - x$ (c) $\dfrac{x^3}{x^2+1} - x$

Exercice 2.
Étudier les limites des expressions suivantes en 0 :

(a) $\dfrac{\sqrt{1+x}}{x}$ (b) $\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x}$ (c) $\dfrac{x^2}{1-\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}}$

Exercice 3.
Étudier les limites des expressions suivantes en -2 :

(a) $\dfrac{x+4}{x^2+3x+2}$ (b) $\dfrac{x+2}{x^2+3x+2}$ (c) $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+5x+2}$

Exercice 4.
Calculer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ (b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$ (e) $\lim\limits_{x\to (-1)^+} \dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2+4x+3}$ (f) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x}{\sqrt{x+3}-2}$

Exercice 5.
Soient $(m,n) \in \mathbb{N}^2$. Étudier $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{1+x^m}-\sqrt{1-x^m}}{x^n}$

Exercice 6.
Étudier les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\cos x - 3x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5}{x^2+2-\cos x}$

2/ Calculs de dérivées

Exercice 7.
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en 0 :

$$f\,:\,x \longmapsto \sqrt{x} \qquad g\,:\,x \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\ln x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad h\,:\,x \longmapsto \frac{x}{1+|x|}$$

Exercice 8.
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en 1 :

$$f\,:\,x \longmapsto |x^2+2x-3| \qquad g\,:\,x \longmapsto (x-1)\sqrt{|x^2-1|} \qquad h\,:\,x \longmapsto \begin{cases} x\ln x + 1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Exercice 9.
Déterminer les ensembles de dérivabilité puis les dérivées des fonctions :

$$f : x \longmapsto 3x^7 - \frac{x^4}{4} + 3 \qquad g : x \longmapsto 4\sqrt{x} - \frac{1}{x\sqrt{x}} \qquad h : x \longmapsto \cos x \times \sin x$$

$$k : x \longmapsto \sqrt{x^2+1} \qquad l : x \longmapsto (x^2+x)^7 \qquad m : x \longmapsto \sqrt{x^2-2}$$

Exercice 10. Même exercice :

$$f : x \longmapsto \cos(\cos x) \qquad g : x \longmapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \qquad h : x \longmapsto \sin^2(3x+2) \qquad k : x \longmapsto \frac{1}{\sin^4 x}$$

Exercice 11.
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto x^2 - \frac{2}{x} \qquad g : x \longmapsto \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \qquad h : x \longmapsto x e^{x^2+1} \qquad k : x \longmapsto \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$l : x \longmapsto x\sqrt{x^2+3} \qquad m : x \longmapsto \frac{x}{(x^2+3)^3} \qquad n : x \longmapsto \frac{1}{x\ln x} \qquad p : x \longmapsto \frac{e^x}{2e^x+5}$$

3/ Relations de comparaison

Exercice 12.

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que l'on a $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.
2) Soient $a > 1$ et $\alpha > 0$. Montrer que $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{o}(a^x)$

Exercice 13.
Étudier les limites des expressions suivantes en $+\infty$:

(a) $-4x^2+6x-7$ (b) $\dfrac{2x^2-3x+5}{x^3+x-3}$ (c) $\dfrac{2x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

Exercice 14.
Comparer $f(x)$ et $g(x)$ au voisinage de a dans les cas suivants :

1) $f(x) = x \ln x,\ g(x) = \ln(1+2x)$ et $a = 0$.
2) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ g(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$ et $a = -1$.
3) $f(x) = x^{-\frac{1}{x}},\ g(x) = \ln x$ et $a = 0$.

Exercice 15.
Étudier les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ (2+\cos x) + \sin x$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\sin x}{x - 4\cos x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \cos\left(\frac{x^2-1}{2x^3+1}\right)$

Exercice 16.
Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{3\sin x}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(2x)}$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^x - 1}{\ln x}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{\sin x} - 1}{x\ \ln x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}$ pour $a \in \mathbb{R}$

Exercice 17.
Trouver un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de :

(a) $\sqrt{x^2+2x-3}$ (b) $\tan\left(\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)$ (c) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$

Exercice 18.
Trouver un équivalent simple au voisinage de 0 de :

(a) $\dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{\cos x}$ (b) $\dfrac{\sin x + \cos x - \tan x - 1}{x^2}$ (c) $\dfrac{\mathrm{e}^{\sin(2x)} - \mathrm{e}^{\sin x}}{\tan x}$

Exercice 19.
Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\ln x + 1}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Big[\ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)\Big]^{\frac{1}{x}}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$