V – Ensembles et applications

1/ Théorie des ensembles

1.1) Notions de base

Définition *Un ensemble est une collection d'objets à laquelle un objet peut appartenir ou non.*
- *On note « $x \in \mathrm{E}$ » lorsque x appartient à l'ensemble E : c'est un* ***élément*** *de E.*
- *On note « $x \notin \mathrm{E}$ » lorsque x n'appartient pas à l'ensemble E.*
- *On note $\emptyset$ l'* ***ensemble vide****, qui est dépourvu d'élément.*
- *On note enfin $\{x\}$ l'ensemble constitué du seul élément x.*

Définition

Soient E *et* F *deux ensembles.*
- *On dit que* F *est une* ***partie de* E** *et l'on note* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ *si tout élément de* F *appartient à* E.
- *L'ensemble des parties de* E *se note* $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

Proposition

Soient E, F *et* G *des ensembles quelconques.*
- $\emptyset \subset \mathrm{E}$ *et* $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}$.
- *Si* $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ *et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{G}$, *alors* $\mathrm{E} \subset \mathrm{G}$.
- $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ *si, et seulement si,* ($\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ *et* $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$).

1.2) Opérations sur les ensembles

Définition *Soient* E *un ensemble et* A, B *deux parties de* E. *On définit les parties suivantes :*
- $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{E} \middle/ x \in \mathrm{A} \text{ ou } x \in \mathrm{B}\right\}$ *appelée* ***l'union de* A *et* B**
- $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{E} \middle/ x \in \mathrm{A} \text{ et } x \in \mathrm{B}\right\}$ *appelée* ***l'intersection de* A *et* B**
- $\overline{\mathrm{A}} = \left\{x \in \mathrm{E} \middle/ x \notin \mathrm{A}\right\}$ *appelée* ***le complémentaire de* A**
- $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \left\{x \in \mathrm{A} \middle/ x \notin \mathrm{B}\right\}$ *appelée* ***le complémentaire de B dans A***

Remarque : l'ensemble $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}$ se lit aussi **A privé de B**.

Proposition

Soient E *un ensemble et* A, B, C *trois parties de* E. *On a les relations suivantes :*

- $A \cup \overline{A} = E$ *et* $A \cap \overline{A} = \emptyset$.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *et* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Proposition

Soient E *un ensemble et* A, B *deux parties de* E. *Alors :*

- $A \subset (A \cup B)$ *et* $B \subset (A \cup B)$.
- $(A \cap B) \subset A$ *et* $(A \cap B) \subset B$.

Proposition

Soient E *un ensemble et* A, B *deux parties de* E.
Si $A \subset B$, *alors* $A \cup B = B$ *et* $A \cap B = A$.

Définition *Soient A et B deux ensembles. Le* ***produit cartésien de A par B*** *est l'ensemble* $A \times B = \left\{(a, b) \middle/ a \in A,\ b \in B\right\}$. *Lorsque* $A = B$, *on note* $A \times A = A^2$.

Remarque : cette définition s'étend au produit de n ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ via

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \left\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \middle/ a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \dots,\ a_n \in A_n\right\}$$

1.3) Les quantificateurs

Définition *Pour synthétiser les écritures, on utilise les symboles* $\forall$ *et* $\exists$.

- « $\forall x \in E$ » *se lit* « *Pour tout* $x \in E$ »
- « $\exists x \in E$ » *se lit* « *Il existe* $x \in E$ »
- « $\exists !\, x \in E$ » *se lit* « *Il existe un unique* $x \in E$ »

Proposition

On ne peut pas intervertir deux quantificateurs distincts. Autrement dit,

$$\boxed{\forall x \in A,\ \exists y \in B \dots \neq \exists y \in B,\ \forall x \in A \dots}$$

Définition *Un prédicat sur un ensemble E est une assertion* $P(x)$ *dépendant d'une variable* $x \in E$.

Proposition (négation des quantificateurs)

Soient E un ensemble et P un prédicat sur E.

- *NON* $\left(\forall x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)\right)$ *équivaut à* $\exists x \in \mathrm{E}, \left(\textit{NON } \mathrm{P}(x)\right)$.
- *NON* $\left(\exists x \in \mathrm{E}, \mathrm{P}(x)\right)$ *équivaut à* $\forall x \in \mathrm{E}, \left(\textit{NON } \mathrm{P}(x)\right)$.

2/ Applications

2.1) Notions de base

Définition *Soient E et F deux ensembles. Définir **une application** u de E dans F, c'est associer à tout élément $x \in \mathrm{E}$ un unique élément de F noté $u(x)$.*

- *L'ensemble* E *est appelé **l'ensemble de définition de u**.*
- *L'ensemble* F *est appelé **l'ensemble d'arrivée de u**.*
- *Pour tout élément $x \in \mathrm{E}$, l'élément $u(x)$ est appelé **l'image de x par u**.*
- *Soit $y \in \mathrm{F}$: tout $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = u(x)$ est appelé **un antécédent de y par u**.*

Notation : on note alors $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F},\ x \longmapsto u(x)$.

Définition *Soient E et F deux ensembles, et $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.*

- *Pour toute partie A de E, l'application $u_{|\mathrm{A}} : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{F},\ x \longmapsto u(x)$ est appelée **la restriction de u à A**.*
- *Toute application v définie sur un ensemble* A *contenant E et vérifiant $v_{|\mathrm{E}} = u$ est appelée **un prolongement de u**.*

2.2) Image directe d'une partie

Définition *Soient E et F deux ensembles, $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application et A une partie de E. L'ensemble $u(\mathrm{A}) = \left\{y \in \mathrm{F} \middle/ \exists x \in \mathrm{A}, y = u(x)\right\}$ est appelé **l'image directe de A par u**. C'est l'ensemble des images par u des éléments de* A.

<u>**Caractérisation**</u> **:** $\boxed{x \in u(\mathrm{A}) \iff \exists a \in \mathrm{A},\ x = u(a)}$

2.3) Composition d'applications

Définition *Soient E, F et G trois ensembles, $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux applications. On appelle **composée de u par v** l'application $v \circ u : x \longmapsto v(u(x))$ de E dans G.*

Remarque : l'ordre est ici primordial et $v \circ u \neq u \circ v$ en général ; d'ailleurs les ensembles de définition et d'arrivée de u et v risquent de poser problème.

2.4) Injectivité, surjectivité et bijectivité

Soient E, F deux ensembles et $u\ :\ \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ une application.

Définition *On dit que u est injective si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par u, c'est-à-dire que **u ne prend jamais deux fois la même valeur**.*

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application u est injective.

(ii) Pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $u(x) = y$ possède au plus une solution $x \in \mathrm{E}$.

(iii) Pour tous $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}^2$, on a $u(x_1) = u(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$.

Définition *On dit que u est surjective si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par u, c'est-à-dire que **u atteint toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée**.*

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application u est surjective.

(ii) Pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $u(x) = y$ possède au moins une solution $x \in \mathrm{E}$.

(iii) On a $u(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.

Définition *On dit que u est bijective si elle est à la fois injective et surjective.*

Proposition (caractérisations équivalentes)

Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application u est bijective.

(ii) Pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $u(x) = y$ possède exactement une solution $x \in \mathrm{E}$.

*(iii) Tout élément de F admet **exactement** un antécédent par u.*

3/ Application réciproque

3.1) Définition et premières propriétés

Définition

Soit u une bijection de E dans F.

- *L'application qui, à tout élément de F, associe son unique antécédent par u dans* E *s'appelle* ***l'application réciproque de u****. On la note u^{-1}.*
- *Pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$, on a donc $y = u(x) \iff x = u^{-1}(y)$.*

Proposition

Soient E et F deux ensembles, et u une bijection de E dans F.
Alors $\boxed{u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}}$ *et* $\boxed{u \circ u^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}.}$

Théorème

Soient E et F deux ensembles, $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{E}$ deux applications telles que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Alors u est une bijection et $v = u^{-1}$.

Corollaire

Si u est bijection de E dans F, alors u^{-1} est une bijection de F dans E et $\boxed{\left(u^{-1}\right)^{-1} = u.}$

Proposition

Soient $u : \mathrm{E} \longrightarrow \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \longrightarrow \mathrm{G}$ deux bijections. Alors $v \circ u$ est une bijection de E *dans* G *et sa réciproque est* $\boxed{(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}.}$

3.2) Cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

Définition *On dit qu'une fonction f est **continue** sur I si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ pour tout $a \in \mathrm{I}$.*

Remarque : c'est le cas des fonctions usuelles et de leurs composées diverses.

Théorème (de la bijection continue)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1) f est continue sur I ;

2) f est strictement monotone sur I ;

Alors f est une bijection de I sur l'intervalle $f(\mathrm{I})$. De plus, f^{-1} a le même sens de variation.

Remarque : les bornes de $f(\mathrm{I})$ sont les limites de f aux bornes de I. En fait, un tableau de variations complet fournira *a priori* tous les renseignements utiles et permettra de débusquer les bijections (quitte à restreindre les ensembles de départ et d'arrivée si besoin).

Proposition

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème : c'est donc une bijection.
Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Proposition

Soit f une fonction vérifiant les hypothèses du théorème. On suppose qu'elle est dérivable et que f' ne s'annule jamais sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $f(\mathrm{I})$ et $\boxed{\left(f^{-1}\right)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$

Remarque : on dérive la relation $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ pour obtenir l'expression de $\left(f^{-1}\right)'$.

Exercices

1/ Théorie des ensembles

Exercice 1.
On considère l'ensemble $E = \{a; b; c; d\}$. Déterminer toutes les parties de E.

Exercice 2.
Soient A et B deux parties d'un ensemble E.

1) Comparer les parties $A \cap (A \cup B)$ et A.
2) Montrer que $A \cup B = A \cap B$ si, et seulement si, $A = B$.
3) Simplifier $\left(\overline{A} \cap B\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup (A \cap B)$.
4) Montrer que A et B sont disjointes si, et seulement si, $\overline{A} \cup \overline{B} = E$.

Exercice 3.
Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E.

1) Montrer que $(A \cup B) \subset C$ si, et seulement si, $A \subset C$ et $B \subset C$.
2) Montrer que $A \cap C = A \cup B$ si, et seulement si, $B \subset A \subset C$.

Exercice 4.
Écrire la négation des propositions suivantes :

1) Toutes les voitures rapides sont rouges.
2) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que $0 < q < \varepsilon$.
3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 < 0$.
4) Tout triangle rectangle possède un angle droit.
5) Il existe un mouton écossais dont au moins un côté est noir.

Exercice 5.
Peut-on intervertir les quantificateurs « $\forall\, n \in \mathbb{N}$ » et « $\exists\, m \in \mathbb{N}$ » dans ce qui suit ?

1) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ n \geqslant m$
2) $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m \in \mathbb{N},\ n^2 \geqslant m$
3) $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, m \in \mathbb{Z},\ n \geqslant m$
4) $\forall\, n \in \mathbb{Z},\ \exists\, m \in \mathbb{Z},\ n^2 \geqslant m$

2/ Applications

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2$.

1) On pose $A = [\,-1\,;4\,]$. Déterminer l'ensemble $f(A)$.
2) Soient B et C deux parties de $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $B \subset C \Longrightarrow f(B) \subset f(C)$.
   (b) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 7.
Soit u une application de E dans F. Soient A et A′ deux parties non vides de E.

1) Montrer que $u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')$.
2) Montrer que $u(A \cap A') \subset u(A) \cap u(A')$ et que l'inclusion inverse est fausse.
3) Si u est injective, montrer que $u(A \cap A') = u(A) \cap u(A')$.

Exercice 8.
Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1) Si $g \circ f$ est injective, montrer que f est injective.
2) Si $g \circ f$ est surjective, montrer que g est surjective.

Exercice 9.
Soient f une application de E dans F et g une application de F dans G.

1) Si f et g sont injectives, montrer que $g \circ f$ est injective.
2) Si f et g sont surjectives, montrer que $g \circ f$ est surjective.
3) Si f et g sont bijectives, montrer que $g \circ f$ est bijective.

Exercice 10.
Montrer que les fonctions suivantes sont des bijections entre des intervalles à préciser :

$$f : x \longmapsto x^2 - 1 \qquad g : x \longmapsto x^3 + 2x - 1 \qquad h : x \longmapsto x^5 + 3x^3 + 2x - 1$$

Exercice 11.
Même exercice avec les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{x} - 5 \qquad g : x \longmapsto \mathrm{e}^{x^3} - 1 \qquad h : x \longmapsto 2\ln x + x^3 + x$$