VI – Les nombres complexes

1/ Définitions et propriétés algébriques

1.1) Généralités

Théorème (admis)

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ *contenant* $\mathbb{R}$ *et appelé* ***corps des nombres complexes*** *tel que :*

- $\mathbb{C}$ *est pourvu d'une addition et d'une multiplication prolongeant celles de* $\mathbb{R}$ *et vérifiant exactement les mêmes règles de calcul.*
- $\mathbb{C}$ *contient un élément noté* i *qui vérifie* $\boxed{\mathrm{i}^2 = -1.}$
- *Tout nombre* $z \in \mathbb{C}$ *s'écrit de manière unique* $\boxed{z = a + \mathrm{i}b \ \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2.}$

Corollaire *Pour tous* x, y, a *et* $b \in \mathbb{R}$, *on a :* $\quad x + \mathrm{i}y = a + \mathrm{i}b \iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$

Définition *Soient* $z \in \mathbb{C}$ *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *tels que* $z = a + \mathrm{i}b$.

- *L'écriture* $z = a + \mathrm{i}b$ *s'appelle* ***la forme algébrique*** *du complexe* z.
- *Le réel* a *est* ***la partie réelle de z*** *et se note* $a = \mathrm{Re}(z)$.
- *Le réel* b *est* ***la partie imaginaire de z*** *et se note* $b = \mathrm{Im}(z)$.

Remarques :

1) L'ensemble des réels est $\mathbb{R} = \left\{z \in \mathbb{C} \Big/ \mathrm{Im}(z) = 0\right\}$.
2) On note $\mathrm{i}\mathbb{R} = \left\{z \in \mathbb{C} \Big/ \mathrm{Re}(z) = 0\right\}$ l'ensemble des **imaginaires purs**.

Proposition (linéarité des parties réelle et imaginaire)

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *On a alors :*

$$\boxed{\mathrm{Re}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Re}\,(z_1) + \mathrm{Re}\,(z_2)} \qquad \boxed{\mathrm{Re}\,(\lambda z_1) = \lambda\,\mathrm{Re}\,(z_1)}$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\,(z_1 + z_2) = \mathrm{Im}\,(z_1) + \mathrm{Im}\,(z_2)} \qquad \boxed{\mathrm{Im}\,(\lambda z_1) = \lambda\,\mathrm{Im}\,(z_1)}$$

1.2) Interprétation géométrique

Dans toute la suite, le plan euclidien $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,;\vec{v}\right)$.

Définition *Soient* $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$, $z=x+\mathrm{i}y\in\mathbb{C}$ *et* $\mathrm{M}(x,y)\in\mathscr{P}$.

- *Le point* M *est appelé* ***l'image du complexe z***. *On le note* $\mathrm{M}(z)$.
- *Le complexe z est appelé* ***l'affixe du point*** **M**.

Définition *Tout vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{V}}(a,b)$ *du plan complexe est associé à son affixe* $z=a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$.
On le note alors $\overrightarrow{\mathrm{V}}(z)$.

Proposition (opérations sur les vecteurs)

- *Soient* $\mathrm{A}(z_a)$ *et* $\mathrm{B}(z_b)$ *deux points du plan complexe. Le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *a pour affixe* $\boxed{z_b-z_a}$.
- *Soient* $\vec{u}(z_u)$ *et* $\vec{v}(z_v)$ *deux vecteurs du plan complexe, et k un réel.*
  Les vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ *et* $k\vec{u}$ *ont pour affixes respectives* $\boxed{z_u+z_v}$ *et* $\boxed{kz_u}$.

1.3) La conjugaison

Définition *Soit le nombre complexe* $z=a+\mathrm{i}b\in\mathbb{C}$ *avec* $(a\,,b)\in\mathbb{R}^2$.
On appelle ***conjugué de z*** *le nombre complexe* $\boxed{\overline{z}=a-\mathrm{i}b}$.

Proposition (interprétation géométrique)

Soit $z\in\mathbb{C}$. *Les points* $\mathrm{M}(z)$ *et* $\mathrm{M}\left(\overline{z}\right)$ *sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.*

Théorème (compatibilité avec les opérations)

Pour tous nombres complexes z_1 *et* $z_2\in\mathbb{C}$, *on a*

$$\boxed{\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}}\qquad\boxed{\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}}\qquad\boxed{\overline{z_1\times z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}}\qquad\boxed{\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\quad si\ z_2\neq 0}$$

Proposition

Pour tout nombre complexe $z\in\mathbb{C}$, *on a* $\overline{\left(\overline{z}\right)}=z$ *et*

$$\boxed{\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}}\qquad\boxed{\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}}\qquad\boxed{z\in\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=\overline{z}}\qquad\boxed{z\in\mathrm{i}\mathbb{R}\Longleftrightarrow z=-\overline{z}}$$

1.4) Le module

Définition *Soit $z = a + ib$, avec $(a\,,b) \in \mathbb{R}^2$, un complexe.*
*On appelle alors **module de z** le réel positif* $\boxed{|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.}$

Proposition (interprétation géométrique)

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{M}(z)$ dans le plan complexe. Alors $\boxed{|z| = \mathrm{OM}.}$

Proposition (normes et distances)

- *Soit $\overrightarrow{\mathrm{V}}(z)$ un vecteur du plan complexe. Alors* $\boxed{\left\|\overrightarrow{\mathrm{V}}\right\| = |z|.}$
- *Soient $\mathrm{A}(z_a)$ et $\mathrm{B}(z_b)$ deux points du plan complexe. Alors* $\boxed{\mathrm{AB} = |z_b - z_a|.}$

Proposition

Pour tout nombre complexe z, on a :

- $\boxed{|z| = \left|\overline{z}\right|}$ *et* $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ *et* $\mathrm{Im}(z) \leqslant |\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|.$

Proposition

Pour tout nombre complexe z non nul, on a $\boxed{\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}}$ *et* $\boxed{|z| = 1 \Longleftrightarrow \dfrac{1}{z} = \overline{z}.}$

Théorème (multiplicativité des modules)

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\boxed{|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|} \qquad \boxed{\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \ \text{si}\ z_2 \neq 0}$$

Théorème (inégalité triangulaire)

Pour tous nombres complexes z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$, on a

$$\boxed{\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|}$$

Remarque : l'une des égalités se réalise s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z_1 = \lambda z_2$ ou bien si $z_2 = 0$.

2/ Argument et exponentielle complexe

2.1) Argument d'un nombre complexe non nul

Définition *Soit* M *le point d'affixe* $z \in \mathbb{C}^*$ *dans le plan complexe.*
Un ***argument de z*** *est une mesure, notée* $\arg(z)$*, de l'angle orienté* $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$.

Théorème (forme trigonométrique)

Tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$ *s'écrit sous* ***forme trigonométrique*** $z = |z|\left(\cos\arg(z) + \mathrm{i}\sin\arg(z)\right)$.

2.2) L'ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

Définition *On note* $\mathbb{U}$ *l'ensemble des nombres complexes de module* 1.

Remarque : géométriquement, $\mathbb{U}$ s'identifie au cercle trigonométrique $\Gamma = \left\{\mathrm{M} \in \mathscr{P} \,\middle/\, \mathrm{OM} = 1\right\}$.

Définition *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, on pose* $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$ *: c'est la* ***notation d'Euler****.*
De plus, on conviendra que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarques :

1) On a $\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \in \mathbb{C} \,\middle/\, \theta \in \mathbb{R}\right\}$. C'est le paramétrage classique du cercle unité.
2) Par définition, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| = 1$ et $\arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) = \theta + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Proposition

Pour tous θ *et* $\varphi \in \mathbb{R}$*, on a :*

$\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}$ $\boxed{\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}$ $\boxed{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \Longleftrightarrow \theta = \varphi + 2k\pi \text{ (avec } k \in \mathbb{Z})}$

Proposition (formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$*, on a* $\boxed{\cos\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)}$ *et* $\boxed{\sin\theta = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right).}$

Applications classiques

❶ On retrouve les formules d'addition des cosinus et des sinus en écrivant sous forme algébrique la relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \times \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$.

❷ Dès qu'on croise une expression de la forme $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}b}$, on peut la factoriser par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{a+b}{2}}$.
La forme algébrique nous donne les formules de factorisation des cosinus et sinus.

2. 3) Linéarisation d'expressions trigonométriques

On désire remplacer des produits de puissances de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ par des combinaisons linéaires de termes de la forme $\cos(k\theta)$ ou $\sin(k\theta)$. Ceci permet de trouver des primitives, par exemple. Pour cela, on injecte les formules d'Euler dans les expressions à linéariser.

2. 4) La formule de Moivre

Proposition

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$*, on a* $(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)$.

Applications

1) On peut exprimer $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
2) On peut factoriser $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$ en s'aidant de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$.

2. 5) La forme exponentielle

Théorème (forme exponentielle)

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ *s'écrit sous* ***forme exponentielle*** $\boxed{z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\arg(z)}}$.

Proposition

Pour tout $(r, r', \theta, \theta') \in \left]0\,;+\infty\right[^2 \times \mathbb{R}^2$*, on a* $\boxed{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = r'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'} \iff \big(r = r' \text{ et } \theta \equiv \theta'\ [2\pi]\big)}$.

Théorème

Pour tous z_1 *et* $z_2 \in \mathbb{C}^*$*, on a :*

$$\boxed{\arg(z_1 \times z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + 2k\pi} \qquad \boxed{\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + 2k\pi}$$

$$\boxed{\arg(\overline{z_1}) = \arg\left(\frac{1}{z_1}\right) = -\arg(z_1) + 2k\pi}$$

L'exponentielle complexe

Définition

Soit $z = x + \mathrm{i}y$ *avec* $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$*. On appelle* ***exponentielle de z*** *le nombre complexe* $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$.

3/ Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

3.1) Racine carrée d'un complexe

Définition *Soit $a \in \mathbb{C}$. On appelle* ***racine carrée*** *de a tout nombre complexe z tel que $z^2 = a$.*

Proposition

Tout nombre complexe non nul a admet exactement deux racines carrées.

Calcul des racines carrées sous forme algébrique

Considérons un nombre complexe $a = X + iY$, avec $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$. Si son argument n'est pas simple, on ne peut pas déterminer ses racines carrées sous forme exponentielle. On recherche donc les nombres complexes $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tels que $z^2 = a$.

Alors $$z^2 = a \iff \begin{cases} z^2 = a \\ |z|^2 = |a| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = X \\ 2xy = Y \\ x^2 + y^2 = \sqrt{X^2 + Y^2} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2 + Y^2} + X\right) \\ y^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{X^2 + Y^2} - X\right) \\ xy = Y/2 \end{cases}$$

Les deux premières équations nous fournissent les nombres réels x et y au signe près ; la dernière permet justement de savoir si les signes de x et y sont égaux ou opposés.

3.2) L'équation du second degré

Théorème (version ultime)

Étant donnés trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$\textbf{(E)} : az^2 + bz + c = 0$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$ son discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ.

- *Si $\Delta \neq 0$, alors* ***(E)*** *admet deux racines distinctes* $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \delta}{2a}}$ *et* $\boxed{z_2 = \dfrac{-b + \delta}{2a}.}$

  En pratique, on prend $\delta = \sqrt{\Delta}$ si $\Delta > 0$ et $\delta = i\sqrt{-\Delta}$ si $\Delta < 0$.

- *Si $\Delta = 0$, alors* ***(E)*** *admet une unique racine double* $\boxed{z_0 = \dfrac{-b}{2a}.}$

Proposition

Soient trois réels a, b et c, avec $a \neq 0$. Deux nombres z_1 et z_2 (éventuellement égaux) sont les deux racines de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si, et seulement si, $\boxed{z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}}$ *et* $\boxed{z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}.}$
On a alors la factorisation $\boxed{az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).}$

Exercices

1/ Définitions et propriétés algébriques

Exercice 1.
Soit $z = x + \mathrm{i}y$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer les parties réelles et imaginaires des nombres :

$$Z_1 = \frac{z}{z-1} \qquad Z_2 = z^2 - \frac{1}{z} + 2 - \mathrm{i} \qquad Z_3 = \frac{-\mathrm{i}z - 1}{z+1}$$

Exercice 2.
Déterminer à quelles conditions sur $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ le nombre Z est réel ou imaginaire pur :

$$\text{(a)}\ Z = \frac{z+i}{z-i} \qquad \text{(b)}\ Z = z^2 + z + 1 \qquad \text{(c)}\ Z = \frac{z^2}{z+2i} \qquad \text{(d)}\ Z = \frac{z+i}{z-1}$$

Exercice 3.
Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$$\text{(a)}\ (1+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) \qquad \text{(b)}\ \mathrm{i}(5-\mathrm{i})(\mathrm{i}-1) \qquad \text{(c)}\ \frac{18+26\mathrm{i}}{-2+2\mathrm{i}}$$

$$\text{(d)}\ \frac{1}{2+\mathrm{i}} - \frac{1}{3-\mathrm{i}} \qquad \text{(e)}\ \frac{1}{2+3\mathrm{i}} - \frac{1}{4+5\mathrm{i}} \qquad \text{(f)}\ (1+2\mathrm{i})^3$$

Exercice 4.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Parmi les nombres suivants, lesquels sont réels ou imaginaires purs ?

$$\alpha = 2 + z\overline{z} \qquad \beta = z^2 - \overline{z}^2 \qquad \gamma = (z + \mathrm{i}\overline{z})(\overline{z} - \mathrm{i}z) \qquad \delta = (\mathrm{i}^2 z)(\mathrm{i}\overline{z})$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2\,\overline{z} + 1 - \mathrm{i} = \mathrm{i}\,\overline{z} + 2$.

Exercice 6. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z - \mathrm{i}| = |z + \mathrm{i}| \iff z \in \mathbb{R}$

Exercice 7. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Montrer que $|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$.

Exercice 8. Quel est l'ensemble des points $M(z) \in \mathscr{P}$ tels que $z + \overline{z} = |z|$?

Exercice 9. Déterminer les points $M(z)$ du plan complexe tels que

$$\text{(a)}\quad |z + 1 - \mathrm{i}| = |2 + \mathrm{i}| \qquad \text{(b)}\quad |z| = \left|\overline{z} + 2\right|$$

Exercice 10.

1) Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{Z}^4$. Montrer que : $\exists\,(X, Y) \in \mathbb{Z}^2,\ (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = X^2 + Y^2$.
2) Décomposer 34 et 58 en somme de carrés d'entiers.
3) Trouver alors m et $n \in \mathbb{N}$ tels que $1972 = m^2 + n^2$.

2/ Argument et exponentielle complexe

Exercice 11. Mettre sous forme exponentielle $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^{20}$, $\dfrac{7}{\sqrt{2}+\mathrm{i}}$ et $\dfrac{3-4\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}$.

Exercice 12. Calculer $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{1991}$, $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{10}$, $\dfrac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3}+\dfrac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^3}$ et $\left(\dfrac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{2004}$.

Exercice 13. On pose $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{7}}$, $\mathrm{S}=u+u^2+u^4$ et $\mathrm{T}=u^3+u^5+u^6$. Déterminer S et T.
Indication : on pourra calculer leur somme et leur produit.

Exercice 14.
Soit $u=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathbb{U}$. Déterminer les modules et arguments de $\dfrac{1}{u}$, $-\dfrac{1}{u}$, $\dfrac{u-1}{u+1}$ et $\dfrac{u+1}{1-u}$.

Exercice 15. Soient $z_1=\frac{\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=1-\mathrm{i}$.

1) Écrire z_1, z_2 et $z=z_1/z_2$ sous forme exponentielle.
2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

(1) $z^2-2(1+2\cos\theta)z+5+4\cos(\theta)=0$	(2) $z^2-\overline{z}+2=0$
(3) $z^2\sin^2\alpha-4z\sin\alpha+4+\cos^2\alpha=0$	(4) $z^2-(3+4\mathrm{i})z+(5\mathrm{i}-1)=0$
(5) $(1+\mathrm{i})z^2-(5+\mathrm{i})z+6+4\mathrm{i}=0$	(6) $z^2-\alpha(\alpha+\mathrm{i})z+\mathrm{i}\alpha^3=0$
(7) $\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}\right)^2-6\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+2\mathrm{i}}\right)+13=0$	(8) $z^4-32z^2-144=0$

Exercice 17.
Pour a, b et c des réels convenables, on pose $z=(1+\mathrm{i}\tan a)(1+\mathrm{i}\tan b)(1+\mathrm{i}\tan c)$.

1) Calculer $(\cos a\cos b\cos c)z$ et $\mathrm{Im}(z)$.
2) En déduire que $\tan(a)+\tan(b)+\tan(c)=\tan(a)\tan(b)\tan(c)\iff a+b+c\equiv 0\,[\pi]$.
3) Calculer $\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ en choisissant bien a, b et c. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 18. Linéariser les expressions suivantes :

(a) $\cos^4 x$ (b) $\sin^3 x$ (c) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\tan^2 x}$ (d) $\sin x\cos^2 x$ (e) $\cos x\sin 3x$

Exercice 19. Déterminer $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\cos(2x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide des formules d'Euler.