VII – Généralités sur les fonctions réelles

Dans tout le chapitre, $\mathscr{D}$ désigne une partie de $\mathbb{R}$ et $\mathscr{P}$ le plan euclidien.

1/ Définitions et premières propriétés

1.1) Fonction, courbe d'une fonction

Définition

- *Une application f de $\mathscr{D}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée* ***fonction réelle d'une variable réelle****. On parlera aussi de* ***fonction numérique****.*
- *L'ensemble $\mathscr{C}_f = \left\{ \mathrm{M}(x,y) \in \mathscr{P} \,\middle|\, x \in \mathscr{D},\ y = f(x) \right\}$ est appelé* ***la courbe représentative de f****. On dit encore que la courbe $\mathscr{C}_f$ a pour équation* $\boldsymbol{y = f(x)}$.

Remarque : lorsque l'ensemble de définition de f n'est pas donné, on le détermine en recherchant toutes les valeurs de x pour lesquelles le réel $f(x)$ existe.

Proposition (positions relatives)

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur $\mathscr{D}$. Voici les positions de leurs courbes représentatives au niveau des points d'abscisse $x \in \mathscr{D}$:

- *tant que $f(x) > g(x)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$;*
- *tant que $f(x) < g(x)$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est en-dessous de la courbe $\mathscr{C}_g$;*
- *lorsque $f(x) = g(x)$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent.*

1.2) Parité

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. On suppose que $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire que $\boxed{-x \in \mathscr{D} \text{ pour tout } x \in \mathscr{D}.}$ On dit alors que :

- *f est* ***paire sur*** *$\mathscr{D}$ lorsque $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$*
- *f est* ***impaire sur*** *$\mathscr{D}$ lorsque $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$*

Remarque : en fait, les fonctions paires (respectivement impaires) se comportent comme les puissances paires (respectivement impaires) ... d'où l'usage de ces qualificatifs.

Théorème (courbes des fonctions paires et impaires)

- *La courbe d'une fonction paire admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.*
- *La courbe d'une fonction impaire admet l'origine du repère pour centre de symétrie.*

1.3) Périodicité

Définition *Soient f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ et $\mathrm{T} \in \mathbb{R}^*$. On dit que **$f$ est T-périodique** lorsque pour tout $x \in \mathscr{D}$, on a $x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}$ et $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$.*

Théorème (courbes des fonctions périodiques)

Soit f une fonction T−périodique. Sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(\mathrm{T},0)$, ce qui signifie que

$$\boxed{\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \in \mathscr{C}_f \implies (x+\mathrm{T}, y) \in \mathscr{C}_f}$$

Remarque : la courbe $\mathscr{C}_f$ est invariante par toute translation de vecteur $(n\mathrm{T}, 0)$ avec $n \in \mathbb{Z}$, et l'implication donnée dans le théorème est une équivalence.

1.4) Changements de repère et d'échelle

Proposition

Soient a et b deux réels, et f une fonction définie sur $\mathscr{D}$ et de courbe $\mathscr{C}_f$.

- *La courbe de $g : x \longmapsto f(x-a)+b$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a,b)$.*
- *La courbe de $g : x \longmapsto -f(x)$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}x)$.*
- *La courbe de $g : x \longmapsto f(-x)$ est l'image de $\mathscr{C}_f$ par la symétrie d'axe $(\mathrm{O}y)$.*
- *La courbe de $g : x \longmapsto bf(x/a)$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ en multipliant les unités graphiques par a en abscisses et par b en ordonnées.*

Preuve – il suffit de caractériser l'appartenance d'un point $\mathrm{M}(x,y)$ à la courbe de g.

- $(x,y) \in \mathscr{C}_g \iff x-a \in \mathscr{D}_f$ et $y = g(x) = f(x-a)+b \iff (x-a, y-b) \in \mathscr{C}_f$
- $(x,y) \in \mathscr{C}_g \iff x \in \mathscr{D}_f$ et $y = g(x) = -f(x) \iff (x,-y) \in \mathscr{C}_f$
- $(x,y) \in \mathscr{C}_g \iff -x \in \mathscr{D}_f$ et $y = g(x) = f(-x) \iff (-x,y) \in \mathscr{C}_f$
- $(x,y) \in \mathscr{C}_g \iff x/a \in \mathscr{D}_f$ et $y = g(x) = bf(x/a) \iff (x/a, y/b) \in \mathscr{C}_f$

2/ Opérations sur les fonctions

Définition *Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$. On définit alors les fonctions :*

- $(f+\lambda\, g) : x \longmapsto f(x) + \lambda\, g(x)$.
- $(f\, g) : x \longmapsto f(x)\, g(x)$.
- $(1/g) : x \longmapsto 1/g(x)$ *si* $g(x) \neq 0$ *sur* $\mathscr{D}$.

Remarque : avec ces opérations, on obtient tous les quotients et puissances possibles.

Définition

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ telles que $\boxed{f(x) \in \mathscr{D}' \text{ pour tout } x \in \mathscr{D}.}$
*La **fonction composée de f par g** est la fonction $g \circ f : x \longmapsto g\big(f(x)\big)$ définie sur $\mathscr{D}$.*

Remarque : l'hypothèse « $f(x) \in \mathscr{D}'$ pour tout $x \in \mathscr{D}$ » est INDISPENSABLE.

3 / Sens de variation

3.1) Définitions

Définition *Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$. On dit que la fonction f est :*

- ***croissante sur** $\mathscr{D}$ lorsque :* $\forall\,(x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$
- ***strictement croissante sur** $\mathscr{D}$ lorsque :* $\forall\,(x,y) \in \mathscr{D}^2, x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
- ***décroissante sur** $\mathscr{D}$ lorsque :* $\forall\,(x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$
- ***strictement décroissante sur** $\mathscr{D}$ lorsque :* $\forall\,(x,y) \in \mathscr{D}^2,\ x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

Remarque : une fonction est dite **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.

3.2) Propriétés

Théorème (opérations sur les fonctions monotones)

*Soient f et g deux fonctions définies et **monotones** sur $\mathscr{D}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- *Si f et g ont le même sens de variation, alors la fonction $f+g$ est monotone et de même sens de variation que les fonctions f et g.*
- *Si α est positif, f et αf ont le même sens de variation. Sinon, elles ont des sens contraires.*
- *Si f et g sont positives et ont le même sens de variation, alors la fonction fg est monotone et de même sens de variation que les fonctions f et g.*

Théorème (variations des composées)

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, et telles que $f(x) \in \mathscr{D}'$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

- *Si f et g sont toutes les deux croissantes ou bien toutes les deux décroissantes sur leurs domaines de définition respectifs, alors la fonction $g \circ f$ est croissante sur $\mathscr{D}$.*
- *Si l'une des fonctions est croissante sur son domaine de définition et l'autre décroissante sur le sien, alors la fonction $g \circ f$ est décroissante sur $\mathscr{D}$.*

Remarque : il faut travailler sur des intervalles de monotonie pour utiliser ce théorème.

4/ Fonctions bornées

Définition *Soit f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$. On dit que f est :*

- ***minorée*** *sur $\mathscr{D}$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geqslant m$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.*
- ***majorée*** *sur $\mathscr{D}$ lorsqu'il existe $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.*
- ***bornée*** *sur $\mathscr{D}$ lorsqu'elle est minorée et majorée.*
  Ceci revient à dire qu'il existe $\mathrm{A} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|f(x)\right| \leqslant \mathrm{A}$ pour tout $x \in \mathscr{D}$.

Définition *Soient f une fonction numérique définie sur $\mathscr{D}$ et $x_0 \in \mathscr{D}$. On dit que :*

- *f **admet $f(x_0)$ pour minimum sur** $\mathscr{D}$ ou encore que f **admet un minimum sur** $\mathscr{D}$ **en x_0** lorsque $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$. On écrit alors $f(x_0) = \min\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.*
- *f **admet $f(x_0)$ pour maximum sur** $\mathscr{D}$ ou encore que f **admet un maximum sur** $\mathscr{D}$ **en x_0** lorsque $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in \mathscr{D}$. On écrit alors $f(x_0) = \max\limits_{x\in\mathscr{D}} f(x)$.*
- *f **admet un extremum sur** $\mathscr{D}$ lorsqu'elle admet un maximum ou un minimum.*

Remarque : l'existence d'un extremum dépend toujours du choix de l'ensemble de définition. Il ne faut pas oublier de le préciser.

Définition *Un **extremum local** d'une fonction numérique f est un extremum d'une restriction de cette fonction à un **intervalle ouvert**.*

Remarque : f admet un extremum local lorsqu'elle change de sens de variation en un point. Cela se traduit par la présence de « creux » et de « bosses » sur sa courbe représentative.

Exercices

Exercice 1.
Trouver les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f : x \longmapsto \frac{x}{x^2 + x + 1} \qquad g : x \longmapsto \sqrt{1 + \cos x} \qquad h : x \longmapsto \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$$

Exercice 2.
Tracer dans un même repère les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ lorsque

(a) $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$ (b) $f : x \longmapsto 2x + 3$ et $g : x \longmapsto x$

Exercice 3.

1) On note f la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$. Déterminer $f \circ f$. Qu'en déduire ?
2) On définit $f : x \longmapsto 5x - 8$ et $g : x \longmapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 4.
Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto -x^2 + 2x \text{ sur }]-\infty\,;0]. \qquad g : x \longmapsto x\sqrt{x} \text{ sur } [0\,;+\infty[.$$

$$h : x \longmapsto \frac{1}{3x^2 + 5} \text{ sur }]0\,;+\infty[. \qquad k : x \longmapsto \sqrt{1 - \cos x} \text{ sur } [0\,;\pi].$$

Exercice 5.
Les fonctions u et v ont pour tableaux de variations respectifs

x	0		1		3
			2		
$u(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0

et

x	0		2		3
	3				2
$v(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
			1		

On suppose en outre que $u\left(\frac{1}{2}\right) = u(2) = 1$.

1) Quels sont les domaines de définition de u et v ?
2) Dresser le tableau de variations de $u \circ v$.
3) Dresser le tableau de variations de $v \circ u$.

Exercice 6.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la parité de la fonction $f : x \longmapsto (1 + x)^n\,(1 - x)^n$.

Exercice 7.
Les fonctions u et v ont pour tableaux de variations respectifs

x	-4		1		5		10
$u(x)$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

et

x	-2		3		8
$v(x)$	7	$\searrow$	0	$\nearrow$	12

Dresser alors le tableau de variations de $v \circ u$ sachant que $u(0) = 3$, $v(0) = 4$ et $v(6) = 5$.

Exercice 8.
On va prouver dans cet exercice que toute fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

1) *Analyse :* on suppose que $f = g + h$, avec g paire et h impaire sur $\mathbb{R}$.
   (a) Exprimer $f(x)$ et $f(-x)$ en fonction de $g(x)$ et $h(x)$.
   (b) En déduire les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.
2) *Synthèse :* il faut maintenant vérifier que les fonctions g et h déterminées au cours des questions précédentes font bien l'affaire.

Exercice 9.
Étudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$ définie sur $\mathbb{R}$
2) $g : x \longmapsto x\cos x - x^3$ définie sur $[-2\,;3]$
3) $h : x \longmapsto x^2 + x + 1$ définie sur $]-1\,;1[$
4) les fonctions polynomiales (trouver les paires et les impaires)

Exercice 10.
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Si f est paire, que peut-on dire de sa dérivée f' ?
2) Même question lorsque f impaire ou que f est périodique.

Exercice 11.
Étudier les périodicités des fonctions suivantes :

1) $f : x \longmapsto \cos(x/3)$ définie sur $\mathbb{R}$.
2) $g : x \longmapsto \sin^2 x$ définie sur $\mathbb{R}$.
3) $h : x \longmapsto \sin x \cos x$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.
Soit f une fonction périodique sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$.
Montrer alors que la fonction f est constante.

Indication : supposer par l'absurde que $f(a) \neq f(b)$ pour deux réels a et b, et considérer les suites de termes généraux $f(a + n\mathrm{T})$ et $f(b + n\mathrm{T})$.