IX – Calcul intégral

1/ Définitions et propriétés fondamentales

1.1) Intégrale d'une fonction continue

Définition *On parle d'**aire algébrique** d'un domaine du plan lorsque l'on compte positivement les aires des zones situées au-dessus de l'axe* (Ox) *et négativement les autres.*

Définition *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. L'**aire algébrique** du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe* (Ox) *et les deux droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est notée $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et se lit **intégrale de f entre a et b**.*

Remarque : le symbole dt permet de préciser la variable par rapport à laquelle on intègre.

1.2) Les sommes de Riemann

Définition *Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[a\,;b]$. On définit les **sommes de Riemann à gauche et à droite** associées à f sur $[a\,;b]$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{T}_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right)}$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$. Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n(f) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{T}_n(f) = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.}$

1.3) La relation de Chasles

Définition *Soient f une fonction continue sur un intervalle* I *et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$.*

Si $a > b$, on pose $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.}$

Théorème (relation de Chasles)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

$$\boxed{\forall\,(a,b,c)\in \mathrm{I}^3 \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t}$$

1.4) Linéarité et positivité

Théorème (linéarité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I *de* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$\boxed{\forall\,(a,b)\in \mathrm{I}^2 \quad \forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \qquad \int_a^b \left[\alpha f(t)+\beta g(t)\right]\,\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t}$$

Théorème (positivité de l'intégrale)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$.

- *Si* $f \geqslant 0$ *sur* $[\,a\,;b\,]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$ *et* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \implies f = 0$.
- *Si* $f \leqslant g$ *sur* $[\,a\,;b\,]$, *alors* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *(positivité de l'intégrale).*
- *Enfin* $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ *(inégalité triangulaire).*

1.5) Valeur moyenne d'une fonction

Définition *Soit f une fonction continue sur un intervalle* $[\,a\,;b\,]$.
On appelle ***valeur moyenne de f sur $[\,a\,;b\,]$*** *la quantité* $\boxed{\overline{f} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t}$

Proposition (inégalité de la moyenne)

Soit f une fonction continue sur $[\,a\,;b\,]$ *telle que* $m \leqslant f(x) \leqslant \mathrm{M}$ *pour tout* $x\in[\,a\,;b\,]$.

Alors $m \leqslant \overline{f} \leqslant \mathrm{M}$ *c'est-à-dire* $\boxed{m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{M}(b-a).}$

2/ Primitive d'une fonction continue

2. 1) Définition et propriétés

Définition

Soient f et F deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit que F est une ***primitive de f sur I*** *si F est dérivable sur I et que* $\boxed{\mathrm{F}' = f.}$

Proposition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur I.
Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions de la forme $\mathrm{F} + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

2. 2) Recherche de primitives

Il faut utiliser les règles sur le calcul des dérivées, mais dans l'autre sens, pour identifier des dérivées voire des dérivées de fonctions composées. Pour les cas extrêmes, penser à utiliser $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Proposition (cas des polynômes-exponentielles)

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme. La fonction $f : t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{P}(t)$ admet sur $\mathbb{R}$ une primitive de la forme $\mathrm{F} : t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\mathrm{Q}(t)$, où Q un polynôme de même degré que P.

Remarque : résultats similaires en remplaçant P et Q par des combinaisons de sin et cos.

Proposition (cas des fonctions rationnelles)

On recherche une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{at+b}{(t-\alpha)(t-\beta)}$ pour $(a,b,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^4$.

- *Si $\alpha \neq \beta$, on met notre fonction sous la forme $f(t) = \dfrac{\gamma}{t-\alpha} + \dfrac{\delta}{t-\beta}$ avec $(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$.*
- *Si $\alpha = \beta$, on met notre fonction sous la forme $f(t) = \dfrac{a}{t-\alpha} + \dfrac{\gamma}{(t-\alpha)^2}$ avec $\gamma \in \mathbb{R}$.*

3 / Calcul des intégrales

3.1) Lien entre primitives et intégrales

Théorème (fondamental)

Soient I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, f *une fonction continue sur* I *et* $a \in$ I.

L'unique primitive de f *sur* I *qui s'annule en* a *est la fonction* $\boxed{\mathrm{F} : x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.}$

Théorème

Soient f *une fonction continue sur un intervalle* I *et* F *une primitive de* f *sur* I.

Pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, *on a alors* $\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a) = \big[\mathrm{F}(t)\big]_a^b.}$

3.2) Intégration par parties

Théorème (formule d'intégration par parties)

Soient f *et* g *deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$. *Alors*

$$\boxed{\forall\,(a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)\,g(t)\big]_a^b - \int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t}$$

3.3) Changement de variables

Théorème (formule de changement de variables)

Soient I *et* J *des intervalles de* $\mathbb{R}$, $\varphi\ :\ \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ *une fonction dérivable sur* I *et de dérivée continue, et* f *une fonction continue sur* J. *Alors*

$$\boxed{\forall\,(a,b) \in \mathrm{I}^2 \qquad \int_{u=a}^{u=b} f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t=\varphi(a)}^{t=\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

On dit que l'on a effectué le ***changement de variable*** $\boldsymbol{t = \varphi(u)}$.

En pratique :

- pour passer de la variable u à la variable t, on fait apparaître un intégrande de la forme $\varphi' \times f \circ \varphi$ puis on remplace $f(\varphi(u))$ par $f(t)$ et $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ par $\mathrm{d}t$;
- pour passer de t à u, on remplace $f(t)$ par $f(\varphi(u))$ et $\mathrm{d}t$ par $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$;
- dans tous les cas, les bornes de l'intégrale sont les valeurs prises la variable utilisée.

Grands classiques :

- En présence d'un terme en $\sqrt{1-t^2}$, on pose $t=\cos(u)$ ou $t=\sin(u)$.
- En présence d'un terme en $\dfrac{1}{1+t^2}$, on pose $t=\tan(u)$.
- En présence d'un terme dépendant uniquement de e^t, on pose $t=\ln(u)$ ou $u=\mathrm{e}^t$.
- En présence d'une fonction de $\cos(u)$ et $\sin(u)$, on tente $t=\cos(u)$, $\sin(u)$ ou $\tan(u)$.
- En présence d'un terme de la forme $\sqrt{f(u)}$, on peut tenter $t=\sqrt{f(u)}$.

4/ Applications

4.1) Mesures géométriques

Théorème (calculs d'aires)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$. L'aire du domaine du plan délimité par sa courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe $(\mathrm{O}x)$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $\boxed{\mathcal{A}=\int_a^b \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t.}$

Théorème (calculs d'aires, bis)

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$. L'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est $\boxed{\mathcal{A}=\int_a^b \left|g(t)-f(t)\right|\,\mathrm{d}t.}$

Théorème (calculs de volumes)

Soit Σ un solide compris entre les plans d'équations $z=a$ et $z=b$. On suppose que sa section par le plan de cote z a pour aire $\mathscr{S}(z)$, avec $\mathscr{S}$ une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Son volume est alors $\boxed{\mathscr{V}_\Sigma=\int_a^b \mathscr{S}(z)\,\mathrm{d}z}$

4.2) Calculs de limites de sommes

En présence d'une somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_{n,k}$ ou $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{n,k}$ de termes dépendant à la fois de k et de n, on peut reconnaître une somme de Riemann sur $[0\,;1]$ d'une fonction f bien choisie

$$\boxed{\mathrm{S}_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)} \quad \text{ou} \quad \boxed{\mathrm{T}_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)}$$

Ceci permet de calculer sa limite grâce au théorème vu en début de chapitre.

Exercices

1/ Définition et propriétés fondamentales

Exercice 1.
On définit sur l'intervalle $\mathrm{I} = [\,0\,;10\,]$ les fonctions f et g par

$$\begin{array}{llll}
\forall\, x \in [0,2[& f(x) = -1 & \forall\, x \in [0,1[& g(x) = 1 \\
\forall\, x \in [2,5[& f(x) = 2 & \forall\, x \in [1,4[& g(x) = -2 \\
\forall\, x \in [5,7[& f(x) = -3 & \forall\, x \in [4,8[& g(x) = 3 \\
\forall\, x \in [7,9[& f(x) = 1 & \forall\, x \in [8,9[& g(x) = -1
\end{array}$$

Calculer les intégrales sur I des fonctions f, g, f^2, $f+g$ et fg.

Exercice 2.
Donner les signes des nombres réels suivants :

$$\text{(a)} \int_0^2 -x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_1^{0,5} \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(c)} \int_5^{23} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u \qquad \text{(d)} \int_\pi^{\frac{4\pi}{3}} \tan(v)\,\mathrm{d}v$$

Exercice 3.
Comparer les nombres réels suivants :

(a) $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^2 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin u\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos u\,\mathrm{d}u$

Exercice 4.
Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\,a\,;b\,]$.
On considère la fonction $\mathrm{P} : t \longmapsto \displaystyle\int_a^b [f(x)+tg(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

1) Quel est le signe de la fonction P sur $\mathbb{R}$?

2) En déduire que $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 5.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement croissante telle que $f(0) = 0$.
Montrer que : $\forall\, x > 0, \quad \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = xf(x)$. *(Interprétation géométrique ?).*

2/ Recherches de primitives

Exercice 6.
Déterminer les expressions des primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (b) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{x^4(1-x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3-1}$ (e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ (f) $\displaystyle\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+3}$

Exercice 7.
Même exercice :

(a) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$ (b) $\displaystyle\int \frac{\sin x\;\mathrm{d}x}{1+\cos^2(x)}$ (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\tan x}\,\mathrm{d}x}{\cos^2(x)}$

(d) $\displaystyle\int (x^3+5x^2-2)\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int \cos(x)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int x^2\,\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 8.
Calculer au moyen d'une intégration par parties :

(a) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int x\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int x^\alpha \ln x\,\mathrm{d}x$

Exercice 9.
Soit f une fonction continue et T-périodique sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\displaystyle\int_a^{a+\mathrm{T}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.
Déterminer les primitives suivantes à l'aide d'un changement de variables :

(a) $\displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$ (d) $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin^3(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 11.
Soit $a > 1$. Démontrer que $\displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\ln t\;\mathrm{d}t}{1+t^2} = 0$

Exercice 12.
Déterminer les expressions des primitives suivantes :

(a) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int x\sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}}$

(d) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$ (e) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2-x}}$ (f) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

3/ Sommes de Riemann

Exercice 13.
À l'aide de sommes de Riemann, calculer les intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_0^1 (2x+1)\,\mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$ (c) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{E}(2z)\,\mathrm{d}z$

Exercice 14.
Calculer les limites des suites suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}$ (c) $\displaystyle\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(n+k)^{\frac{1}{n}}$ (d) $\displaystyle\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$

Exercice 15.
Même exercice :

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+k}{n^2+k^2}$ (b) $\displaystyle\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(n-k)}$ (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$