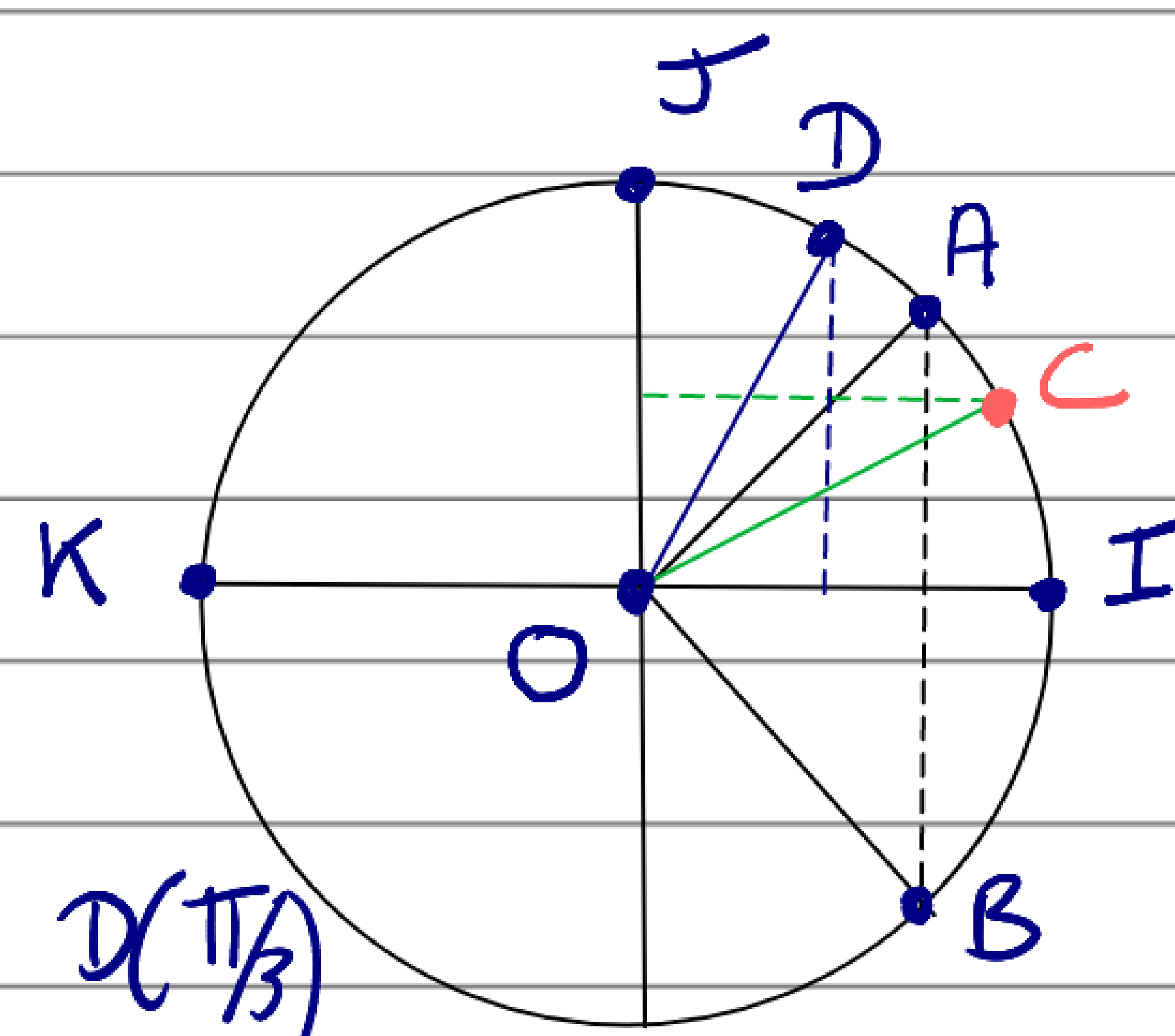
CHAPITRE 2

EXO 1

Avec un dessin, c'est encore mieux !



Par lecture graphique, on obtient

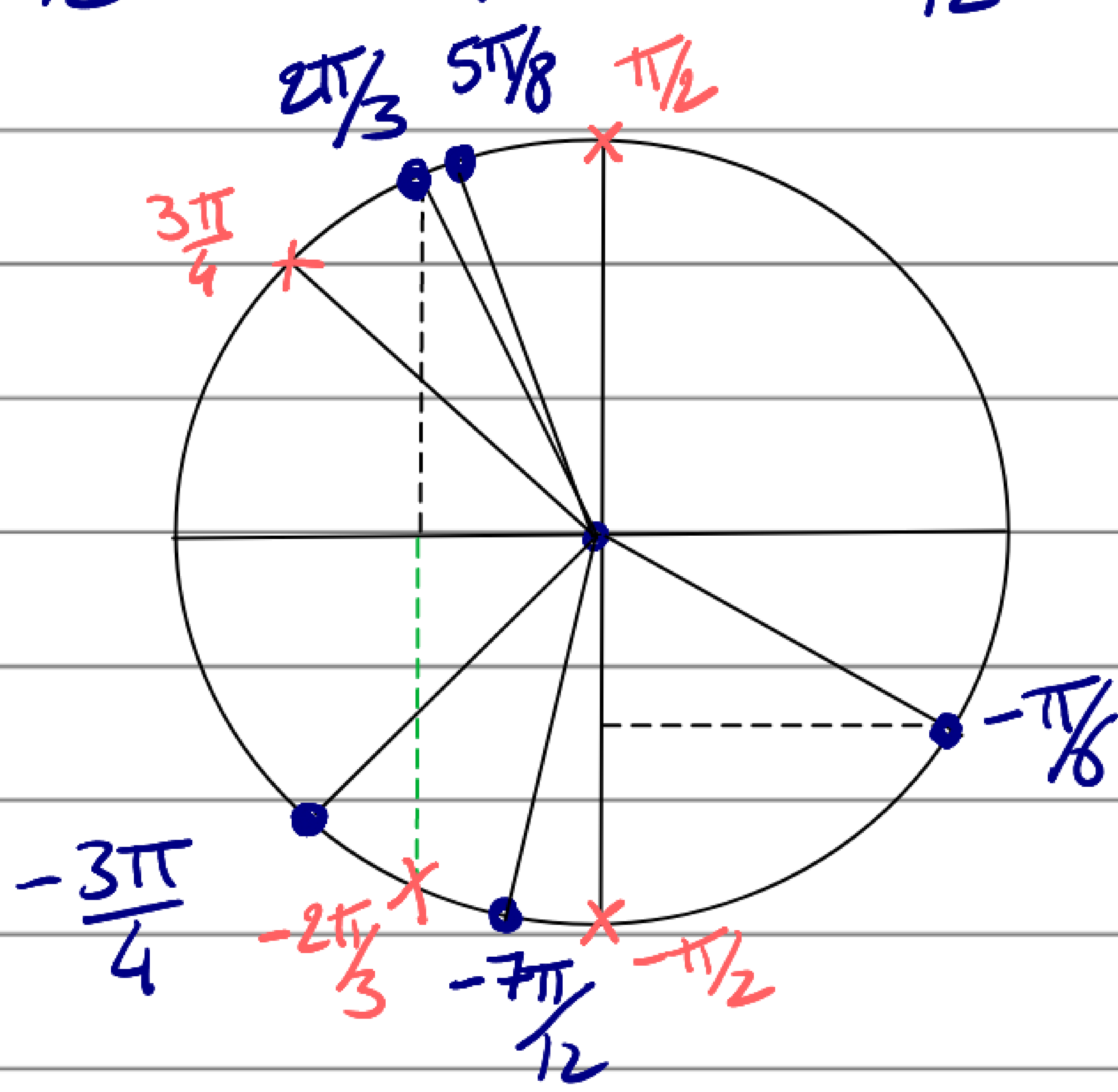
$I(0)$ $J(\pi/2)$ $K(\pi)$

$A(\pi/4)$ $B(-\pi/4)$ $C(\pi/6)$ $D(\pi/3)$

EXO 2

Pour les deux derniers, noter que

- $\frac{5\pi}{8}$ est la moyenne de $\frac{4\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ et $\frac{6\pi}{8}=\frac{3\pi}{4}$
- $-\frac{7\pi}{12}$ est la moyenne de $-\frac{6\pi}{12}=-\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{8\pi}{12}=-\frac{2\pi}{3}$



$\frac{2\pi}{3}=\frac{16\pi}{24}$ et $\frac{5\pi}{8}=\frac{15\pi}{24}$

EXO 3

Très simple : dans chaque cas, on découpe le cercle en n arcs de même longueur donc les abscisses curvilignes des sommets sont $\frac{2\pi}{n}k$ avec $0\leq k\leq n-1$

EXO4

(a) $\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}-2\pi\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$

(b) $\frac{13\pi}{4}-4\pi=\frac{13-16}{4}\pi=\frac{-3\pi}{4}$ donc $\frac{13\pi}{4}=\frac{-3\pi}{4}+4\pi$

et $\sin\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\pi\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(c) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(d) $\frac{20}{3}-6=\frac{2}{3}$ donc $\sin\left(\frac{20\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+6\pi\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(e) $\cos\left(\frac{7\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$

(f) $\frac{15}{4}-4=-\frac{1}{4}$ donc $\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}+4\pi\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

(g)
$$\begin{array}{r|l} 1651 & 6 \\ \hline 45 & 275 \\ 31 & \\ 1 & \end{array}$$

$\frac{1651}{6}-276=\frac{1651-1656}{6}=\frac{-5}{6}$

d'où $\cos\left(\frac{1651\pi}{6}\right)=\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}-\pi\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$

(h) $-\frac{19}{6}+4=\frac{5}{6}$ donc $\sin\left(-\frac{19\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}-4\pi\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\boxed{\frac{1}{2}}$

EXO5

Idée : $\frac{\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}-\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{12}+\frac{2\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

ce qui permet de calculer les cos, sin et tan de ces réels grâce aux formules d'addition....

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} \\
\qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
\qquad = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\
\text{Par quotient } \tan\left(\pi/12\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \boxed{2-\sqrt{3}}
\end{array}\right.$$

Pour $\frac{5\pi}{12}$, on peut noter que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ si bien que

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}} \\
\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\
\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dots = \boxed{2+\sqrt{3}}
\end{array}\right.$$

Enfin - et c'est diabolique ! - $\frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$ d'où

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}} \\
\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = +\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} \\
\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \boxed{-2-\sqrt{3}}
\end{array}\right.$$

Ce bel exercice a permis de revoir plusieurs relations essentielles en trigonométrie. À revoir sans modération !

EXO 6

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi$$
$$-\frac{7\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 4\pi$$
$$\frac{21\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 10\pi$$
$$\frac{13\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 6\pi$$

(a) $\cos(x-\pi) = \cos(x+\pi) = \boxed{\ominus \cos(x)}$

(b) $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \ominus \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \boxed{\ominus \cos(x)}$

(c) $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \sin(-x) = \boxed{\ominus \sin(x)}$

(d) $\sin(x-\pi) = \sin(x+\pi) = \boxed{\ominus \sin(x)}$

(e) $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x)$ cf. c)

$\sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-(-x)\right) = \cos(-x) = \cos(x)$

donc $\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right) + \sin\left(x-\frac{7\pi}{2}\right) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$

(f) $\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x)$ et $\sin\left(\frac{13\pi}{2}-x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x)$

donc $\cos(21\pi/2 - x) + \sin(13\pi/2 - x) = \boxed{\cos(x) - \sin(x)}$

(g) $\sin(2013\pi - x) = \sin(\pi - x) = \boxed{\sin(x)}$

EXO 7

(a) $\sin^4(x) - \cos^4(x) = \underbrace{\left(\sin^2(x)+\cos^2(x)\right)}_{=1}\left(\sin^2(x)-\cos^2(x)\right) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$

(b) $2\sin^2(x)\cos^2(x) + \sin^4(x) + \cos^4(x) = \left(\cos^2(x)+\sin^2(x)\right)^2 = 1$

donc $2\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 - \cos^4(x) - \sin^4(x)$

(c) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) = 1 + 2\sin(x)\cos(x)$

$(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2(x) - 2\sin(x)\cos(x) + \sin^2(x) = 1 - 2\sin(x)\cos(x)$

donc $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$

(d) $\frac{1}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$

EXO 8

1) $1 + t^2 = 1 + \tan^2(\theta/2) = 1 + \frac{\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{\cos^2(\theta/2)+\sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{1}{\cos^2(\theta/2)}$

donc $\cos^2(\theta/2) = \boxed{\frac{1}{1+t^2}}$

2) $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1 = \dfrac{2}{1+t^2} - 1 = \boxed{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}$

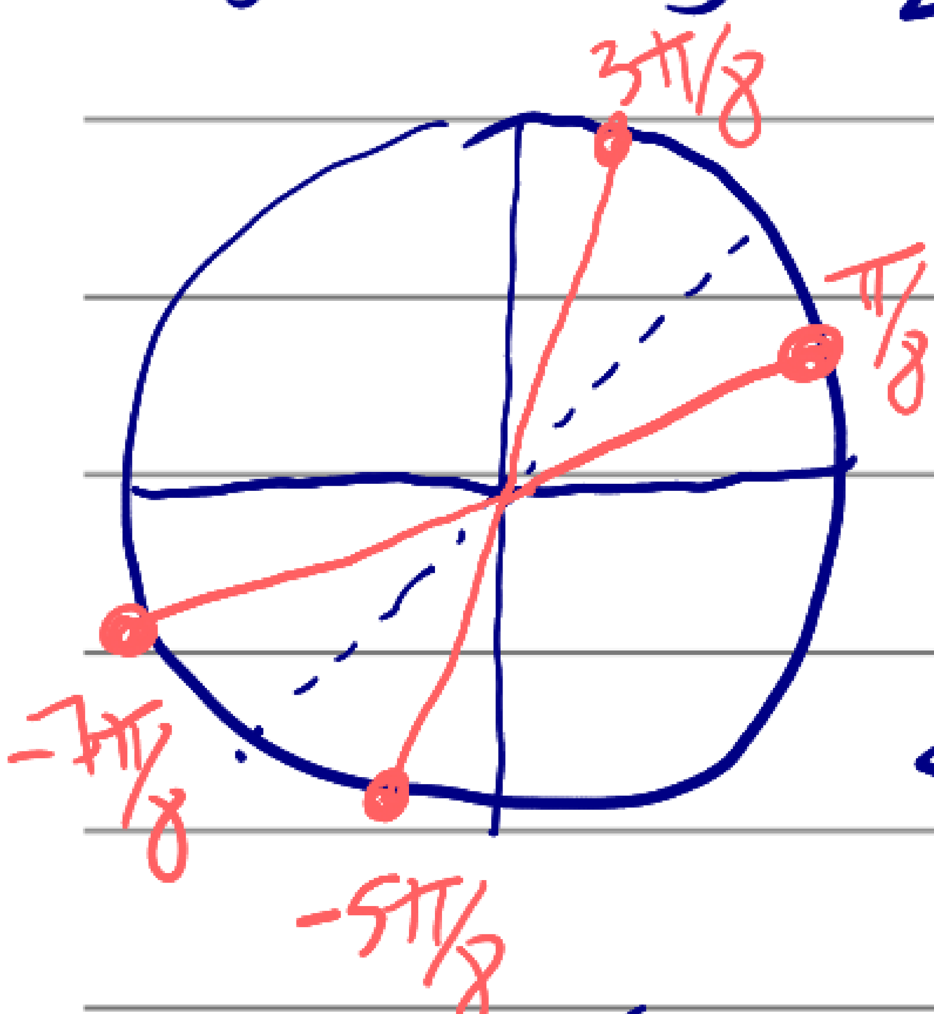
$\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2\tan(\theta/2)\cos^2(\theta/2) = \boxed{\dfrac{2t}{1+t^2}}$

3) $\tan(\theta) = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \boxed{\dfrac{2t}{1-t^2}}$

EXO 9

(a) $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi}$ ou $\boxed{x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi}$
avec $k \in \mathbb{Z}$

(b) $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

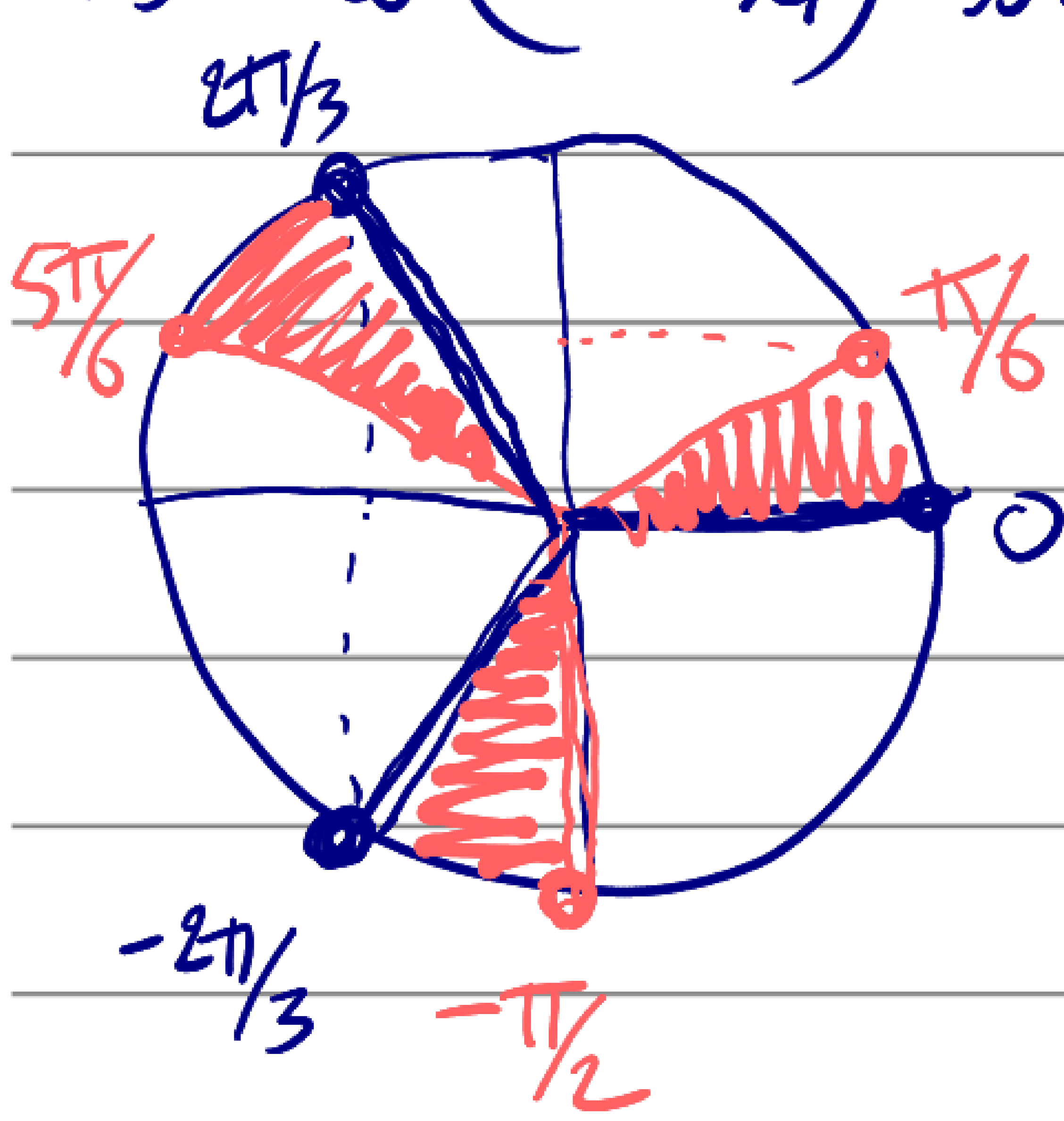


$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ ou $2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/8 + k\pi}$ ou $\boxed{x = 3\pi/8 + k\pi}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -7\pi/8, -5\pi/8, \pi/8$ ou $3\pi/8 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(c) $\cos(3x - \pi/4) = \sin(\pi/4) \Leftrightarrow \cos(3x - \pi/4) = \cos(\pi/4)$



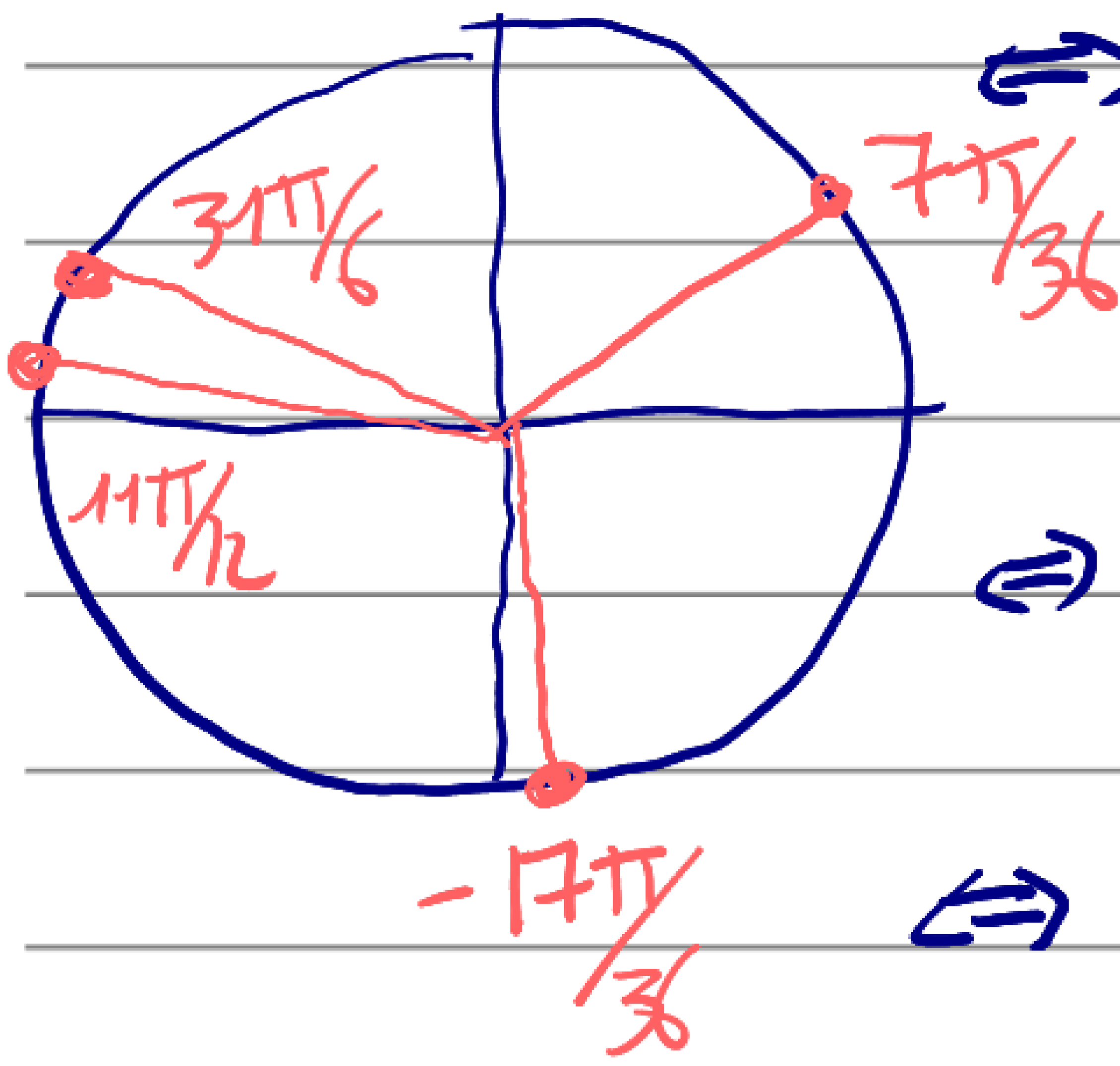
$\Leftrightarrow 3x - \pi/4 = \pi/4 + 2k\pi$ ou $3x - \pi/4 = -\pi/4 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/6 + 2k\pi/3}$ ou $\boxed{x = 2k\pi/3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}, 0, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(d) $\sin(2x - \pi/4) = \cos(x + \pi/6) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - (2x - \pi/4)\right) = \cos(x + \pi/6)$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = \cos(x + \pi/6)$



$\Leftrightarrow \frac{3\pi}{4} - 2x = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $2x - \frac{3\pi}{4} = x + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$\Leftrightarrow 3x = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6} - 2k\pi$ ou $x = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{6} + 2k\pi$

$= \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \qquad = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}}$ ou $\boxed{x = \frac{11\pi}{12} + 2k\pi}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{17\pi}{36}, \frac{7\pi}{36}, \frac{31\pi}{36}$ ou $\frac{11\pi}{12} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

(d) $4\sin^2(x) - 2(\sqrt{3}+1)\sin(x) + \sqrt{3} = 0 \quad (E)$

$\Rightarrow 4X^2 - 2(\sqrt{3}+1)X + \sqrt{3} = 0$ en posant $X = \sin x$

$$\Delta = 4(\sqrt{3}+1)^2 - 4 \times 4\sqrt{3} = 4(\sqrt{3}^2 + 2\sqrt{3} + 1^2 - 4\sqrt{3})$$
$$= 4(\sqrt{3}^2 - 2\sqrt{3} + 1^2)$$
$$= 4(\sqrt{3}-1)^2$$
$$= [2(\sqrt{3}-1)]^2$$

$X_1 = \frac{2(\sqrt{3}+1) - 2(\sqrt{3}-1)}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$ et $X_2 = \frac{2(\sqrt{3}+1) + 2(\sqrt{3}-1)}{2 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$(E) \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ ou $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi}$

EXO 10

C'est le même principe (1) et (2) sont dans l'exo 9

(3) : $\tan(3x - \pi/5) = \tan(x + \frac{4\pi}{5})$

$\Leftrightarrow 3x - \pi/5 = x + 4\pi/5 + k\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \pi + k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi/2}$

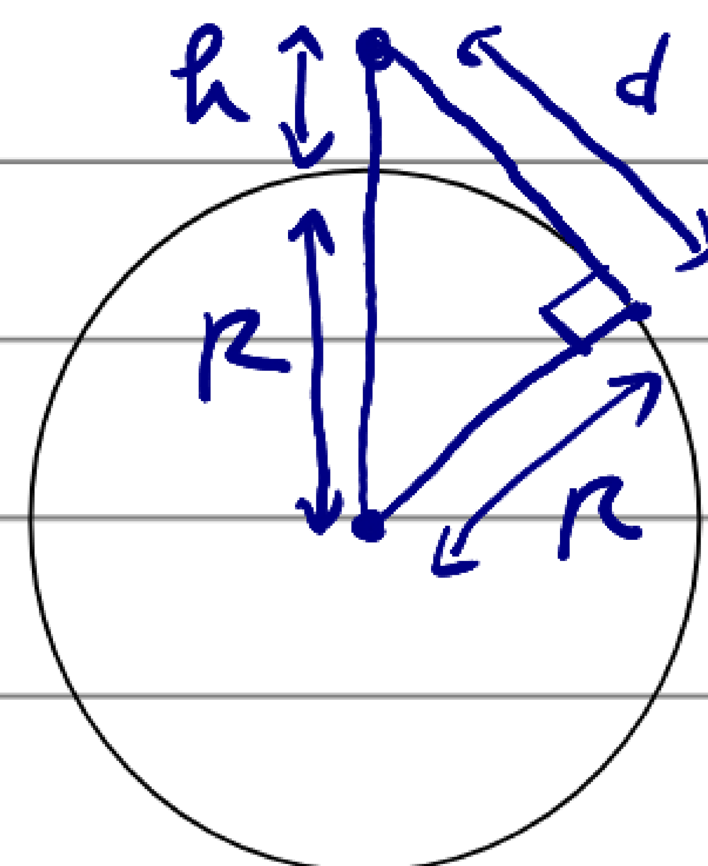
(4) $2\tan^2(x) = 1/\cos^2(x)$

$\Leftrightarrow 2\tan^2(x) = 1 + \tan^2(x)$

$\Leftrightarrow \tan(x) = \pm 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi}$

EXO 11

Notons R le rayon de la Terre, h la hauteur du phare et d la distance depuis laquelle on l'aperçoit (en km).
Voici la situation :



$$(R+h)^2 = d^2 + R^2$$
$$\Rightarrow d^2 = (R+h)^2 - R^2$$
$$= (2R+h)h$$

$R = 6400$
$h = 0{,}1$
$2R+h = 12800{,}1$
$h(2R+h) = 1280{,}01$

soit $d = \sqrt{(2R+h)h} = \sqrt{1280{,}01} \simeq \boxed{35{,}78 \text{ km}}$

C'est pas mal !

EXO 12

- $\frac{2\pi}{3} \in [0,\pi]$ donc $\arccos\left(\cos \frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2\pi/3}$
- $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ donc $\arccos\left(\cos(-2\pi/3)\right) = \boxed{2\pi/3}$
- $\cos(4\pi) = \cos(0)$ donc $\arccos(\cos(4\pi)) = \boxed{0}$
- $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ donc $\arctan\left(\tan(3\pi/4)\right) = \boxed{-\pi/4}$

EXO 13

$$\boxed{\arcsin(\sin\theta) = \theta \text{ si } \theta \in [-\pi/2, \pi/2]}$$

$$\boxed{\arccos(\cos\theta) = \theta \text{ si } \theta \in [0, \pi]}$$

- $\arcsin(-\sqrt{2}/2) = \arcsin\left(\sin(-\pi/4)\right) = \boxed{-\pi/4}$
- $\arccos(-\sqrt{2}/2) = \arccos\left(\cos(3\pi/4)\right) = \boxed{3\pi/4}$
- $\arcsin(-1/2) = \arcsin\left(\sin(-\pi/6)\right) = \boxed{-\pi/6}$
- $\arccos(-1/2) = \arccos\left(\cos(2\pi/3)\right) = \boxed{2\pi/3}$

EXO 14

$$\boxed{\arctan(\tan\theta) = \theta \text{ si } \theta \in]-\pi/2, \pi/2[}$$

- $\arctan(-\sqrt{3}) = \arctan\left(\tan(-\pi/3)\right) = \boxed{-\pi/3}$
- $\arctan(-1) = \arctan\left(\tan(-\pi/4)\right) = \boxed{-\pi/4}$
- $\arctan(1/\sqrt{3}) = \arctan\left(\tan(\pi/6)\right) = \boxed{\pi/6}$
- $\arcsin(\sqrt{3}/2) = \arcsin\left(\sin(\pi/3)\right) = \boxed{\pi/3}$

EXO 15

(a) $\tan(\arcsin x) = \sin(\arcsin x)/\cos(\arcsin x)$

Pour $x \in [-1,1]$ on a $\sin(\arcsin x) = x$ par définition

et $\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$ donc $\cos(\arcsin x) \geq 0$

d'où $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \neq 0$ ssi $x \in]-1,1[$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pour tout } x \in]-1;1[\quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}$

(b) Pour $x \in [-1;1]$, on a $\arccos(x) \in [0;\pi]$ donc $\sin(\arccos x) \geq 0$

et $\sin(\arccos x) = \sqrt{\sin^2(\arccos x)} = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pour tout } x \in [-1;1] \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}}$

(On a montré de la même façon en (a) que $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$)

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$ donc $\cos(\arctan x) > 0$

De plus, $\frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\tan^2\theta$ donc $\cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

(d) Pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\quad \sin(\theta) = \tan(\theta) \times \cos(\theta)$

En particulier $\sin(\arctan x) = \tan(\arctan x) \times \cos(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

EXO 16

(1) $\begin{cases} \cos(2x) = \cos(7x-5x) = \cos(7x)\cos(5x) + \sin(7x)\sin(5x) \\ \cos(12x) = \cos(7x+5x) = \cos(7x)\cos(5x) - \sin(7x)\sin(5x) \end{cases}$

$\Rightarrow \cos(2x) + \cos(12x) = 2\cos(7x)\cos(5x)$

et l'équation proposée équivaut à $3\cos(5x) = 2\cos(7x)\cos(5x)$

soit $(3-2\cos(7x)) \times \cos(5x) = 0$

d'où $\cos(7x) = 3/2$ ou $\cos(5x) = 0$

Bien entendu, $\cos(7x) \leq 1 < 3/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$!

De plus, $\cos(5x) = 0 \Leftrightarrow 5x = \pi/2 + k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/10 + k\pi/5}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{9\pi}{10}, \pm\frac{7\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{10}, \pm\frac{\pi}{10} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

(2) $\begin{cases} \sin(x) = \sin(3x-2x) = \sin(3x)\cos(2x) - \sin(2x)\cos(3x) \\ \sin(5x) = \sin(3x+2x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(2x)\cos(3x) \end{cases}$

$\Rightarrow \sin(x) + \sin(5x) = 2\sin(3x)\cos(2x)$

De la sorte, l'équation proposée s'écrit $2\sin(3x)\cos(2x) - \sin(3x) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(3x)(2\cos(2x) - 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin(3x) = 0$ ou $\cos(2x) = 1/2$

$\sin(3x) = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow \boxed{x = k\pi/3}$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x = -2\pi/3, -\pi/3, 0, \pi/3, 2\pi/3, \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

$\cos(2x) = 1/2 \Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(\pi/3) \Leftrightarrow 2x = \pi/3 + 2k\pi$ ou $2x = -\pi/3 + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \boxed{x = \pi/6 + 2k\pi/3}$ ou $\boxed{x = -\pi/6 + 2k\pi/3}$

$\Leftrightarrow x = -\pi/2, \pi/6, 5\pi/6, -5\pi/6, -\pi/6, \pi/2 + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

On réunit donc toutes ces solutions, ce qui en fait un sacré paquet !

(3) $\cos(x) - \sqrt{3}\sin x = 1 \iff \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2}$

$\iff \cos(\pi/3)\cos(x) - \sin(\pi/3)\sin(x) = 1/2$

$\iff \cos(x - \pi/3) = 1/2 = \cos(\pi/3)$

$\iff x - \pi/3 = \pi/3 + 2k\pi$ ou $x - \pi/3 = -\pi/3 + 2k\pi$

$\iff \boxed{x = 2\pi/3 + 2k\pi}$ ou $\boxed{x = 2k\pi}$

(d) $(\sqrt{3}+1)^2 + (\sqrt{3}-1)^2 = 4 + 2\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3} = 8 = 2\sqrt{2}$

donc l'équation proposée est équivalente à

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\cos(x) + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\sin(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \quad (E)$$

Notons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(possible cf somme des carrés $= 1$)

et $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\varphi = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (possible car $\left|\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right| \leq 1$)

Alors $(E) \iff \cos(\theta)\cos(x) + \sin(\theta)\sin(x) = \cos(\varphi)$

$\iff \cos(x - \theta) = \cos(\varphi)$

$\iff x - \theta = \varphi + 2k\pi$ ou $x - \theta = -\varphi + 2k\pi$

$\iff \boxed{x = \theta + \varphi + 2k\pi}$ ou $\boxed{x = \theta - \varphi + 2k\pi}$

BONUS (POUR LES ACHARNÉS !)

Comme $\cos\theta \geq 0$ et $\sin\theta \geq 0$ on a $\theta \in [0, \pi/2]$

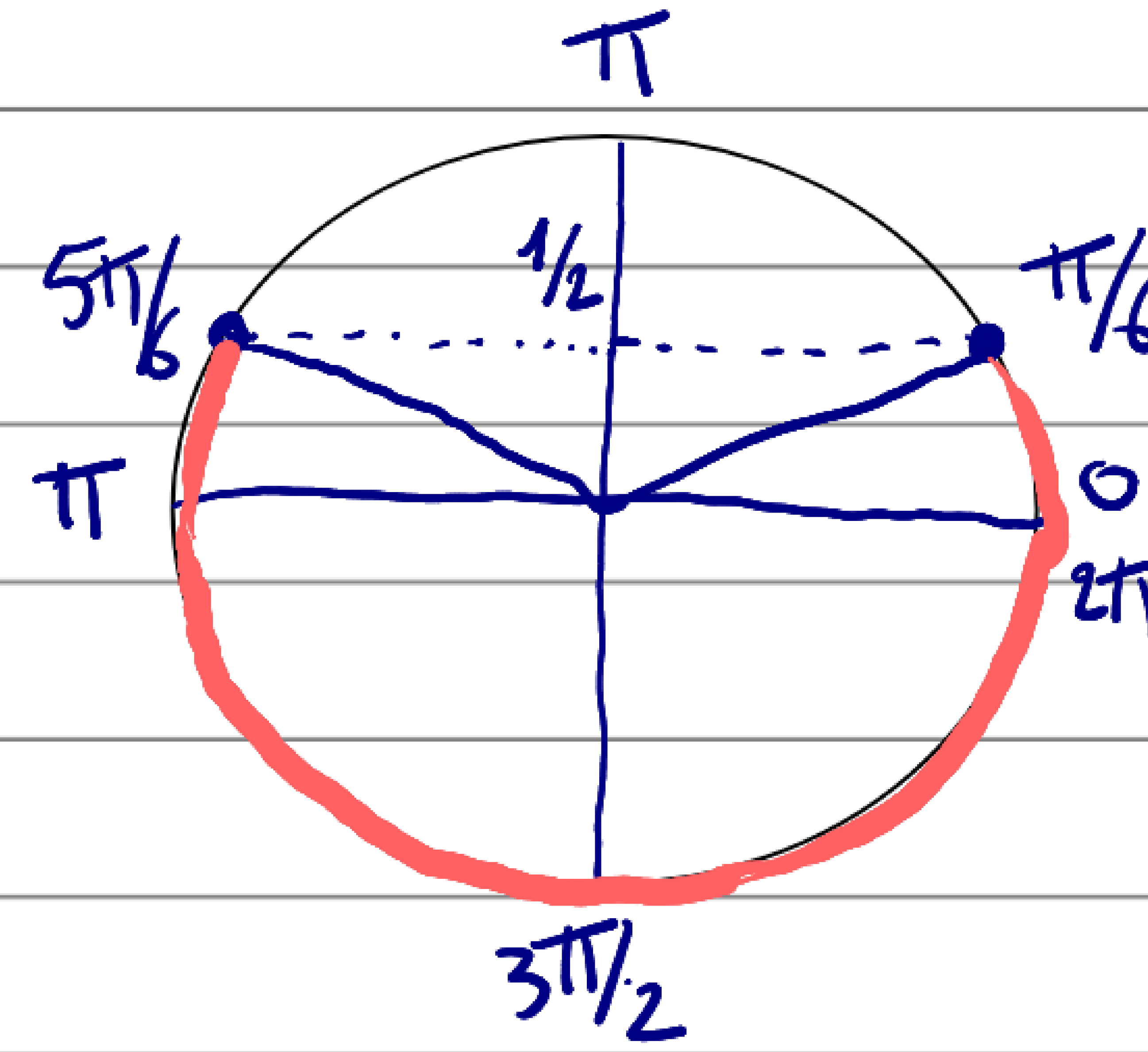
donc $\theta = \arccos(\cos\theta) = \boxed{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}$

Pour φ, on est libres de prendre $\boxed{\varphi = \arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)}$

EXO 17

1) Par lecture graphique sur le cercle ci-contre, on a :

$$\boxed{S = [0, \pi/6[\cup]5\pi/6 ; 2\pi]}$$



2) Ce nouveau cercle est encore plus magnifique que le précédent et permet de voir que

$$\boxed{S =]-\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{6}[\cup]\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}[}$$