CHAPITRE 3

EXO 1

1) $\boxed{\text{NON } P}$ 2) $\boxed{Q \Rightarrow P}$ 3) $\boxed{\text{NON } Q \text{ OU } P}$ 4) $\boxed{\text{NON } P \text{ ET NON } Q}$

EXO 2

$(\text{NON } P \text{ ET } Q) \text{ OU } (\text{NON } P \text{ ET NON } Q) \Leftrightarrow \text{NON } P \text{ ET } (Q \text{ OU NON } Q)$

$\Leftrightarrow \text{NON } P \text{ ET VRAI}$

$\Leftrightarrow \text{NON } P$

donc l'assertion proposée se simplifie en
$(\text{NON } P) \text{ OU } (P \text{ ET } Q)$

soit $(\text{NON } P \text{ OU } P) \text{ ET } (\text{NON } P \text{ OU } Q)$

donc VRAI ET $(\text{NON } P \text{ OU } Q)$

càd $\boxed{\text{NON } P \text{ OU } Q}$

EXO 3

(1) $\text{NON } (a \leq -2 \text{ ou } a \geq 3)$: $a > -2$ ET $a < 3$

$\Leftrightarrow \boxed{-2 < a < 3}$

(2) $\text{NON } (a \leq 5 \text{ et } a > -1)$: $\boxed{a > 5 \text{ OU } a \leq -1}$

(3) $\text{NON } (a \leq 5 \text{ et } 3 > a)$: $a > 5$ ou $3 \leq a$

$\Leftrightarrow \boxed{a \geq 3}$

EXO 4

Si nous partons, il n'y a personne (P ou faux)

Si je reste ou que tu pars, alors il y a quelqu'un (Euh...)

EXO 5

1) NON (NON P ET Q) : $\boxed{\text{P OU NON Q}}$

NON (NON P OU Q) : $\boxed{\text{P ET NON Q}}$

2) NON (P OU (Q ET R)) : $\boxed{\text{(NON P) ET (NON Q OU NON R)}}$

NON (P ET (Q OU R)) : $\boxed{\text{(NON P) OU (NON Q ET NON R)}}$

3) P ⇒ NON Q s'écrit NON P OU NON Q ⇝ négat° : $\boxed{\text{P ET Q}}$

P ⇔ Q s'écrit P ⇒ Q ET Q ⇒ P

soit (NON P OU Q) ET (NON Q OU P)

Négation : $\boxed{\text{(P ET NON Q) OU (Q ET NON P)}}$

4) (NON P ET Q) ⇒ R s'écrit NON (NON P ET Q) OU R

soit P OU NON Q OU R

Négation : $\boxed{\text{NON P ET Q ET NON R}}$

EXO 6

1) (P ET Q) ⇒ P s'écrit NON (P ET Q) OU P

soit NON P OU NON Q OU P ce qui fait $\boxed{\text{VRAI}}$

2) P ⇒ (P OU Q) s'écrit NON P OU P OU Q ce qui fait encore $\boxed{\text{VRAI}}$

3) P OU (P ⇒ Q) s'écrit P OU NON P OU Q et c'est toujours $\boxed{\text{VRAI}}$

EXO 7

1) Soient x et $y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Si $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1}$, alors $x-1 = y-1$ donc $x = y$

Ainsi $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{y-1} \Rightarrow x = y$ d'où $\boxed{x \neq y \Rightarrow \frac{1}{x-1} \neq \frac{1}{y-1}}$

par contraposée

2) Soit $n \in \mathbb{Z}$

Supposons que n est impair : il s'écrit $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbb{Z}$

d'où $n^2 - 1 = (n+1)(n-1) = (2p+2)\,2p = 4\,p(p+1)$

$\begin{cases} \text{Si } p \text{ est pair, } p(p+1) \text{ est multiple de 2 donc } 4p(p+1) \text{ multiple de 8} \\ \text{Si } p \text{ est impair, } p+1 \text{ est pair et } 4p(p+1) \text{ multiple de 8 encore} \end{cases}$

Dans tous les cas, n^2-1 est un multiple de 8

Par conséquent : si n est impair, alors n^2-1 est un multiple de 8

Par contraposée : $\boxed{\text{si } n^2-1 \text{ n'est pas divisible par 8, alors } n \text{ est pair}}$

3) Soit $a \in \mathbb{Z}$

Si $a/2$ est pair, alors $\frac{a}{2} = 2n$ avec $n \in \mathbb{Z}$

donc $a^2 = (4n)^2 = 16n^2$ est un multiple de 16

Par contraposée : $\boxed{\text{si } a^2 \text{ n'est pas un multiple de 16, alors } a/2 \text{ n'est pas pair}}$

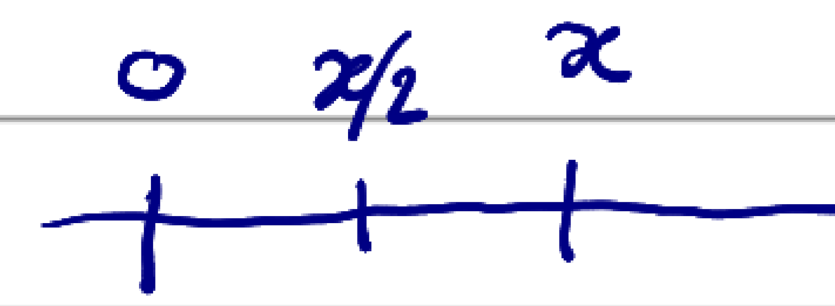
HYPOTHÈSE

EXO 8

1) Soit x un nombre réel tel que $x \leq \varepsilon$ pour tout réel $\varepsilon > 0$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $x > 0$

Considérons alors le réel $\varepsilon = \frac{x}{2}$



- $\varepsilon > 0$ puisque $x > 0$
- $x - \varepsilon = \frac{x}{2} > 0$ donc $x > \varepsilon$

Il existe ainsi un réel $\varepsilon > 0$ tel que $x > \varepsilon$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. On en déduit, par l'absurde, que $x \leq 0$

2) Soit n le carré d'un entier non nul

Raisonnons par l'absurde et supposons que $2n$ est le carré d'un entier

Alors
- $n = p^2$ avec $p \in \mathbb{N}^*$
- $2n = q^2$ avec $q \in \mathbb{N}^*$

d'où $2 = (q/p)^2$ et $\sqrt{2} = p/q \notin \mathbb{Q}$: CONTRADICTION !

On en déduit par l'absurde que $2n$ n'est pas le carré d'un entier

EXO 9

Raisonnons par l'absurde et supposons que chaque tiroir contienne au plus une paire de chaussettes.

Comme on a n tiroirs, on a donc au plus $n \times 1 = n$ paires de chaussettes. Ainsi $n+1 \leq n$ d'où $1 \leq 0$: CONTRADICTION !

On en déduit par l'absurde qu'au moins l'un des tiroirs contient deux paires de chaussettes.

EXO 10 Soient A, B et C trois points non alignés
Notons (Δ_1) la médiatrice de $[AB]$ et (Δ_2) celle de $[AC]$
Raisonnons par l'absurde et supposons que $(\Delta_1) // (\Delta_2)$

- Par définition $(AB) \perp (\Delta_1)$
  Or $(\Delta_2) // (\Delta_1)$ donc $(\Delta_2) \perp (AB)$
- Or $(\Delta_2) \perp (AC)$ par définition
  Comme $(\Delta_2) \perp (AB)$, alors $(AB) // (AC)$ donc A, B et C sont alignés : CONTRADICTION !

On a ainsi prouvé par l'absurde que (Δ_1) et (Δ_2) sont sécantes