CHAPITRE 5

EXO 1

Voici les parties de $\{a, b, c, d\}$, groupées par cardinaux

$\emptyset$

$\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{d\}$

$\{a,b\}$ $\{a,c\}$ $\{a,d\}$ $\{b,c\}$ $\{b,d\}$ $\{c,d\}$

$\{a,b,c\}$ $\{a,b,d\}$ $\{a,c,d\}$ $\{b,c,d\}$

$\{a,b,c,d\}$

Il y en a $16 = 2^4$ ... et c'est normal.

EXO 2

1) $A \subset (A \cup B)$ donc $\boxed{A \cap (A \cup B) = A}$

2) Implication réciproque

Si $A = B$, alors $A \cap B = A = A \cup B$ donc $A \cap B = A \cup B$

Implication directe

Ainsi $\boxed{A = B \Rightarrow A \cup B = A \cap B}$

Supposons que $A \cap B = A \cup B$

Comme $B \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B$, alors $B \subset A \cup B = A \cap B = B$ soit $A \cup B = A \cap B = B$

De même, $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$ donc $A \subset A \cup B = A \cap B = A$ soit $A \cup B = A \cap B = A$

Ainsi $A = B$

On a bien montré que $\boxed{A \cup B = A \cap B \Rightarrow A = B}$

3) $\underbrace{(\bar{A} \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})} \cup (A \cap B) = [\bar{A} \cap (B \cup \bar{B})] \cup (A \cap B)$

$= (\bar{A} \cap E) \cup (A \cap B)$

$= \bar{A} \cup (A \cap B)$

$= \underbrace{(\bar{A} \cup A)}_{E} \cap (\bar{A} \cup B) = \boxed{\bar{A} \cup B}$

4) A et B disjointes $\iff A\cap B=\emptyset \iff \overline{A\cap B}=\overline{\emptyset}=E$

$\iff \overline{A}\cup\overline{B}=E$

EXO3

1) Implication réciproque

Supp que $A\subset C$ et $B\subset C$

Pour tout $x\in A\cup B$, on a $x\in A$ ou $x\in B$

* Si $x\in A$, alors $x\in C$ puisque $A\subset C$
* Si $x\in B$, alors $x\in C$ puisque $B\subset C$

Ainsi $x\in C$ dans tous les cas, si bien que $\boxed{A\cup B\subset C}$

$A\subset C$ et $B\subset C \Rightarrow A\cup B\subset C$

Implication directe

Supposons que $A\cup B\subset C$

Comme $A\subset A\cup B$, alors $A\subset A\cup B\subset C$ d'où $A\subset C$

De même, $B\subset A\cup B\subset C$ d'où $B\subset C$

Ainsi $\boxed{A\subset C \text{ et } B\subset C}$

$A\cup B\subset C \Rightarrow A\subset C$ et $B\subset C$

2) Implication directe

Supposons que $A\cap C=A\cup B$

. Comme $B\subset A\cup B$, alors $B\subset A\cap C$. Or $A\cap C\subset A$ d'où $B\subset A$

. Comme $A\subset A\cup B$, alors $A\subset A\cap C$. Or $A\cap C\subset C$ d'où $A\subset C$

Ainsi $\boxed{B\subset A\subset C}$

$A\cap C=A\cup B \Rightarrow B\subset A\subset C$

Implication réciproque

Supposons que $B\subset A\subset C$. Alors $A\cup B=A=A\cap C$ soit $A\cup B=A\cap C$

$B\subset A\subset C \Rightarrow A\cup B=A\cap C$

EXO 4

1) Il existe une voiture rapide qui n'est pas rouge.
2) $\exists \varepsilon > 0, \forall q \in \mathbb{R}, \; q \leq 0$ ou $q \geq \varepsilon$
3) $\exists x \in \mathbb{R}, \; x^2 \geq 0$
4) Il existe un triangle rectangle sans angle droit
5) Tous les moutons écossais sont entièrement blancs.

EXO 5

1) $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists m \in \mathbb{N}, \; n \geq m$: VRAI, il suffit de prendre $m = n$

   $\exists m \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N}, \; n \geq m$: VRAI aussi, on prend $m = 0$
2) Vrai dans les deux cas, il suffit de prendre $m = 0$
3) $\forall n \in \mathbb{Z} \; \exists m \in \mathbb{Z}, \; n \geq m$: VRAI avec $m = n$

   $\exists m \in \mathbb{Z} \; \forall n \in \mathbb{Z}, \; n \geq m$: signifie que $\mathbb{Z}$ possède un minimum ... ce qui est faux
4) Vrai dans les deux cas, il suffit de prendre $m = 0$

EXO 6

1) Le plus simple est de dresser le tableau de variations de f sur A.
   On lit dedans que $\boxed{f(A) = [0, 16]}$

x	-1		0		4
$f(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	16

2) $B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

   (a) Supposons que $B \subset C$ et montrons que $f(B) \subset f(C)$
   - Soit $x \in f(B)$: il existe $b \in B$ tel que $x = f(b)$
   - Comme $B \subset C$, alors $b \in C$ donc $x \in f(C)$

   Ainsi $x \in f(B) \Rightarrow x \in f(C)$ d'où $f(B) \subset f(C)$

   On a bien démontré $\boxed{B \subset C \Rightarrow f(B) \subset f(C)}$

(b) Idée : utiliser la parité de f pour exhiber deux parties disjointes B et C ayant la même image directe

$B = \{1\}$ et $C = \{-1\}$. Alors $f(B) = \{1\} = f(C)$ mais $B \not\subset C$

ce qui prouve que $f(B) \subset f(C) \Rightarrow B \subset C$ est faux.

EXO 7

1) Soit $x \in u(A \cup A')$

Par définition, il existe $a \in A \cup A'$ tel que $x = u(a)$

On a deux cas : 1) soit $a \in A$... auquel cas $x \in u(A) \subset u(A) \cup u(A')$

2) soit $a' \in A$... auquel cas $x \in u(A') \subset u(A) \cup u(A')$

Ainsi pour tout $x \in u(A \cup A')$, on a $x \in u(A) \cup u(A')$ càd $\boxed{u(A \cup A') \subset u(A) \cup u(A')}$

Soit $x \in u(A) \cup u(A')$

1) si $x \in u(A)$, il existe $a \in A$ tel que $x = u(a)$

Comme $A \subset A \cup A'$, on a donc $x \in u(A \cup A')$

2) Si $x \in u(A')$, il existe $a \in A'$ tel que $x = u(a')$

Comme $A' \subset A \cup A'$, on a donc $x \in u(A \cup A')$

Ainsi $x \in u(A \cup A')$ pour tout $x \in u(A) \cup u(A')$ càd $\boxed{u(A) \cup u(A') \subset u(A \cup A')}$

Par double inclusion, on a bien prouvé que $\boxed{u(A \cup A') = u(A) \cup u(A')}$

2) Soit $x \in u(A \cap A')$: il existe $a \in A \cap A'$ tel que $x = u(a)$

- Comme $A \cap A' \subset A$, $a \in A$ donc $x \in u(A)$
- Comme $A \cap A' \subset A'$, $a \in A'$ donc $x \in u(A')$

Ainsi $x \in u(A)$ et $x \in u(A')$ càd $\boxed{x \in u(A) \cap u(A')}$

On a bien montré que $\boxed{u(A\cap A') \subset u(A)\cap u(A')}$

Pour montrer que l'inclusion inverse est fausse, on prend $u : x \mapsto x^2$ et on utilise la parité pour exhiber deux parties disjointes ayant la même image.

$A = \{1\}$; $A' = \{-1\}$ $\quad u(A) = \{1\} = u(A')$ donc $u(A)\cap u(A') = \{1\}$

cependant $A\cap A' = \emptyset$ donc $u(A\cap A') = \emptyset$

3) Montrons l'inclusion $u(A)\cap u(A') \subset u(A\cap A')$ dans le cas où u est injective

Soit $x \in u(A)\cap u(A')$

- $x \in u(A)$ donc il existe $a\in A$ tel que $x = u(a)$
- $x \in u(A')$ — — — $a' \in A'$ tel que $x = u(a')$

Ainsi $u(a) = u(a')$: comme u est injective, il en découle que $a = a'$

Enfin $a \in A\cap A'$ de ce fait, si bien que $x = u(a) \in u(A\cap A')$

On a bien montré que $\boxed{\begin{array}{l} u(A)\cap u(A') \subset u(A\cap A') \text{ si } u \text{ est injective} \\ \text{soit } u(A)\cap u(A') = u(A\cap A') \end{array}}$

EXO8

1) Supposons que $g\circ f$ est injective

Soient x et $y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$

Alors $g\circ f(x) = g\circ f(y)$ d'où $x = y$ par injectivité de $g\circ f$

Ainsi $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, ce qui prouve que f est injective

2) Supposons que $g\circ f$ est surjective.

Soit $y \in G$: par surjectivité de $g\circ f$, il existe $x\in E$ tel que $y = g\circ f(x) = g(f(x))$

Ainsi il existe $z = f(x) \in F$ tel que $y = g(z)$: ceci étant vrai pour tout $y\in G$, on en déduit que g est surjective

EXO 9

1) On suppose que f et g sont injectives

Soient x et $y \in E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(y)$

Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ d'où $f(x) = f(y)$ par injectivité de g

d'où $x = y$ par injectivité de f

Ainsi $g \circ f(x) = g \circ f(y) \Rightarrow x = y$, ce qui montre que $g \circ f$ est injective

2) On suppose que f et g sont surjectives

Soit $z \in G$: comme g est surjective, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$

De même, f est surjective donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$

Ainsi, il existe $x \in E$ tel que $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$

Ceci étant vrai pour tout $z \in G$, on en déduit que $g \circ f$ est surjective

3) Si f et g sont bijectives, elles sont injectives et surjectives donc, d'après les questions 1) et 2), $g \circ f$ est injective et surjective, càd $g \circ f$ est bijective

EXO 10

Dans chaque cas, il faut se restreindre à un intervalle de stricte monotonie pour assurer l'injectivité et prendre l'ensemble des valeurs atteintes comme ensemble d'arrivée pour assurer l'injectivité

1) $f'(x) = 2x$ du signe de x donc $f \nearrow$ sur $[0, +\infty[$ et $f \searrow$ sur $]-\infty, 0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{f \text{ est une bijection de } [0, +\infty[\text{ sur } [-1, +\infty[}$

2) g est str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonction str $\nearrow$. Via le tableau,

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{g \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } \mathbb{R}}$

3) Même chose pour h (tableau de variations identique à celui de g)

EXO 11

1) $f'(x) = 3e^{3x} + 2e^{x} > 0$ donc f est str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{f \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-5,+\infty[}$

2) $g'(x) = 3x^2 e^{x^3} \geqslant 0$ et ne s'annule qu'en 0 donc g est str $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$, d'où

x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{g \text{ est une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]-1;+\infty[}$

3) $h'(x) = \frac{2}{x} + 3x^2 + 1 > 0$ sur $]0,+\infty[$ donc h est strictement $\nearrow$ sur $]0,+\infty[$ et

x	0		$+\infty$
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boxed{h \text{ est une bijection de }]0,+\infty[\text{ sur } \mathbb{R}}$