

CHAPITRE 6

EXO 1

$$(a) \quad Z_1 = \frac{x+iy}{(x-1)+iy} = \frac{(x+iy)((x-1)-iy)}{(x-1)^2+y^2} = \frac{x(x-1)+y^2+i(y(x-1)-y)}{(x-1)^2+y^2}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(Z_1) = \frac{x^2+y^2-x}{(x-1)^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(Z_1) = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}}$$

$$(b) \quad Z_2 = (x+iy)^2 + \frac{1}{x+iy} + 2-i = x^2-y^2+2ixy + \frac{x-iy}{x^2+y^2} + 2-i$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(Z_2) = x^2+y^2 + \frac{x}{x^2+y^2} + 2} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(Z_2) = 2xy - \frac{y}{x^2+y^2} - 1}$$

$$(c) \quad Z_3 = \frac{-i(x+iy)-1}{(x+1)+iy} = \frac{((y-1)-ix)((x+1)-iy)}{(x+1)^2+y^2} = \frac{(x+1)(y-1)-xy+i(-y(y-1)-x(x+1))}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\operatorname{Re}(Z_3) = \frac{y-x-1}{(x+1)^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\operatorname{Im}(Z_3) = \frac{-x+y-x^2-y^2}{(x+1)^2+y^2}}$$

EXO 2

$$(a) \quad Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = Z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = \frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = (\bar{z}+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}\bar{z}-i(\bar{z}+z)-1 = \bar{z}\bar{z}+i(\bar{z}+z)-1$$

$$\Leftrightarrow 2i(\bar{z}+z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(\bar{z}) = 0$$

$$\text{donc} \quad \boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}}$$

$$Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i} = -\frac{z+i}{z-i} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(z-i) = -(\bar{z}+i)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}\bar{z}-i(\bar{z}+z)-1 = -\bar{z}\bar{z}-i(\bar{z}+z)+1$$

$$\Leftrightarrow 2(\bar{z}\bar{z}-1) = 0 \Leftrightarrow \bar{z}\bar{z} = 1$$

$$\text{donc} \quad \boxed{Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow |z| = 1}$$

(b) Pour $z = x + iy$ (avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$) on obtient

$$Z = (x + iy)^2 + x + iy + 1 = x^2 - y^2 + 2ixy + x + iy + 1 \\ = x^2 + x - y^2 + 1 + i(2xy + y) =$$

donc $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2xy + y = 0}$ et $\boxed{Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + x - y^2 + 1 = 0}$

en notant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$

$$(c) Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{z^2}{z+2i} = \frac{\bar{z}^2}{\bar{z}-2i} \Leftrightarrow z^2\bar{z} - 2iz^2 = z\bar{z}^2 + 2i\bar{z}^2 \\ \Leftrightarrow z\bar{z}(z-\bar{z}) - 2i(z^2 + \bar{z}^2) = 0$$

Avec $z = x + iy$, on obtient $(x^2 + y^2)2iy - 2i(2x^2 - 2y^2) = 0$

soit $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2y(x^2 + y^2) + 4y^2 - 4x^2 = 0}$ en notant $x = \operatorname{Re}(z)$
 $y = \operatorname{Im}(z)$

De même, $\bar{Z} = -Z \Leftrightarrow z^2\bar{z} - 2iz^2 = -z\bar{z}^2 - 2i\bar{z}^2$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(z+\bar{z}) - 2i(z^2 - \bar{z}^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z}(z+\bar{z}) - 2i(z+\bar{z})(z-\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)2x - 2i(2x)(2iy) = 0$$

soit $\boxed{Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x(x^2 + y^2 + 4xy) = 0}$

$$(d) Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = Z \Leftrightarrow \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}-1} = \frac{z+i}{z-1} \Leftrightarrow (\bar{z}-i)(\bar{z}-1) = (\bar{z}-1)(z+i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} - i\bar{z} - \bar{z} + i = z\bar{z} - \bar{z} + i\bar{z} - i$$

$$\Leftrightarrow -i(z+\bar{z}) + \bar{z} - \bar{z} + 2i = 0$$

Avec $z = x + iy$ on obtient $-i2x + 2iy + 2i = 0$ soit $y + 1 - x = 0$

De ce fait $\boxed{Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y + 1 - x = 0}$

De même, $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{Z} = -Z \Leftrightarrow z\bar{z} - i\bar{z} - \bar{z} + i = -z\bar{z} + \bar{z} - i\bar{z} + i$

$$\Leftrightarrow 2z\bar{z} - i(\bar{z} - \bar{z}) - (\bar{z} + \bar{z}) = 0$$

Avec $z = x + iy$, on obtient $2(x^2 + y^2) - i2iy - 2x = 0$
 De ce fait, $\boxed{z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - x + y = 0}$ en notant $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$

EX03

$$(a) (1+i)(1+2i) = 1+2i+i-2 = -1+3i$$

$$(b) i(5-i)(i-1) = (1+5i)(i-1) = i-1-5-5i = -6-4i$$

$$(c) \frac{18+26i}{-2+2i} = \frac{9+13i}{-1+i} = \frac{(9+13i)(-1-i)}{|-1+i|^2} = \frac{-9-9i-13i+13}{2} = \frac{2-11i}{2}$$

$$(d) \frac{1}{2+i} - \frac{1}{3-i} = \frac{2-i}{|2+i|^2} - \frac{3+i}{|3-i|^2} = \frac{2-i}{5} - \frac{3+i}{10} = \frac{4-2i-(3+i)}{10} = \frac{1-3i}{10}$$

$$(e) \frac{1}{2+3i} - \frac{1}{4+5i} = \frac{2-3i}{13} - \frac{4-5i}{41} = \frac{82-123i-(52-65i)}{13 \times 41} = \frac{30-58i}{533}$$

$$(f) (1+2i)^3 = (1+2i)(1+2i)^2 = (1+2i)(1+4i-4) = (1+2i)(-3+4i) = -3+4i-6i-8 = -11-2i$$

EX04

$$\bar{\alpha} = 2 + \bar{z}z = \alpha \text{ donc } \boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$$

$$\bar{\beta} = \bar{z}^2 - z^2 = -\beta \text{ donc } \boxed{\beta \in i\mathbb{R}}$$

$$\bar{\gamma} = (\bar{z} - iz)(z + i\bar{z}) = \gamma \text{ donc } \boxed{\gamma \in \mathbb{R}}$$

$$\delta = -iz\bar{z} = -i|z|^2 \text{ donc } \boxed{\delta \in i\mathbb{R}}$$

EX05

$$2\bar{z} + 1 - i = i\bar{z} + 2 \Leftrightarrow (2-i)\bar{z} = 1+i \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1+i}{2-i} = \frac{(1+i)(2+i)}{5} = \frac{2+i+2i-1}{5} = \frac{1+3i}{5}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z = \frac{1-3i}{5}}$$

EX06

$$|z-i| = |z+i| \Leftrightarrow |z-i|^2 = |z+i|^2 \Leftrightarrow (z-i)(\bar{z}+i) = (z+i)(\bar{z}-i)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + i(z-\bar{z}) + 1 = z\bar{z} + i(\bar{z}-z) + 1$$

$$\Leftrightarrow 2i(z-\bar{z}) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \quad \text{CQFD}$$

EXO 7

$$|z+z'|^2 = (z+z')(\bar{z}+\bar{z}') = z\bar{z} + z'\bar{z} + z\bar{z}' + z'\bar{z}' = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$$

si bien que $|z-z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{z}')$

et donc

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

EXO 8

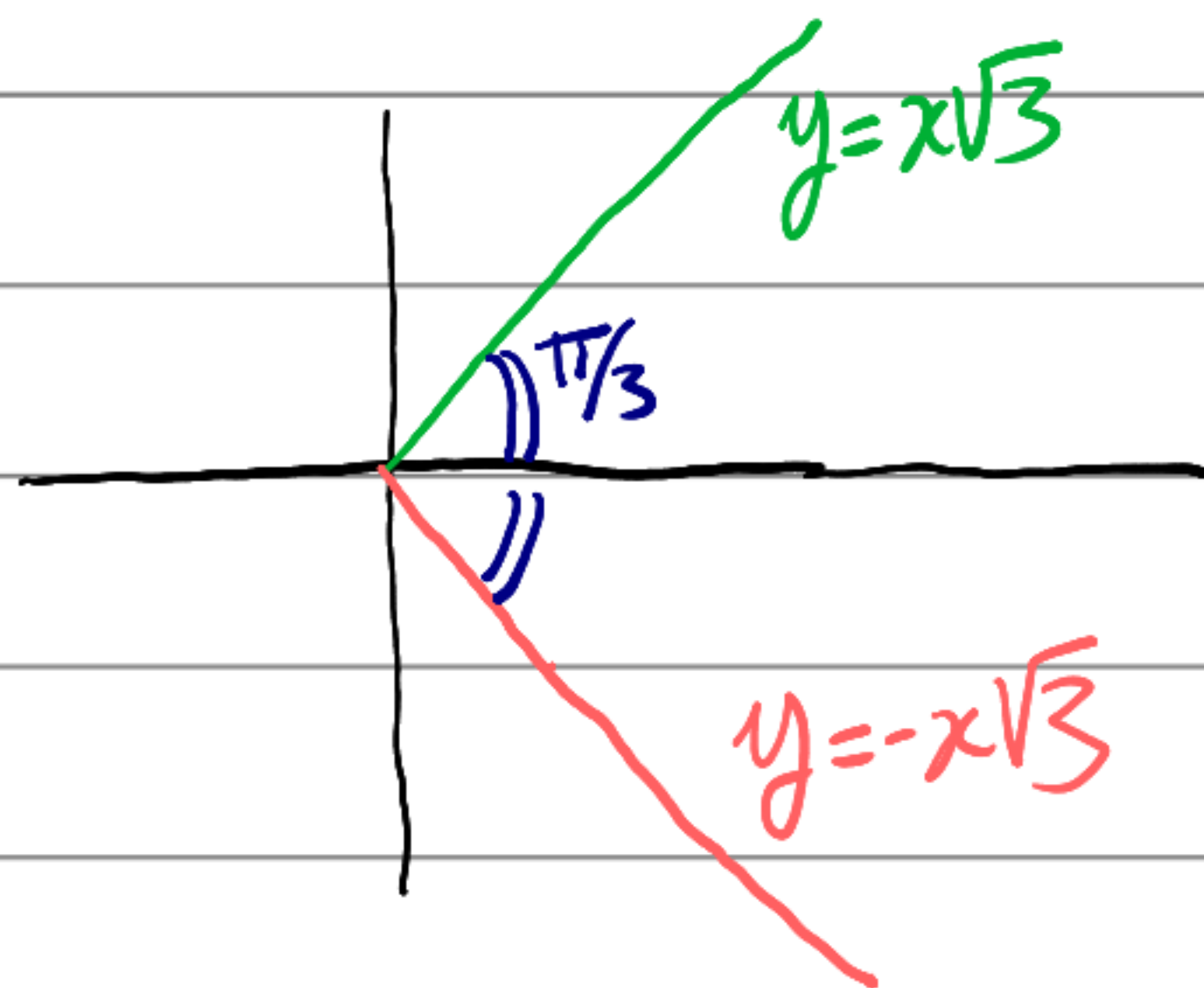
Posons $z = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Alors $z+z' = 2x$ et $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
de sorte que $z+\bar{z} = |z| \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } 4x^2 = x^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } y^2 = 3x^2$$

$$\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } (y = x\sqrt{3} \text{ ou } y = -x\sqrt{3})$$

L'ensemble recherché est la réunion des demi-droites d'équations $y = x\sqrt{3}$ et $y = -x\sqrt{3}$ situées dans le demi-plan $x \geq 0$



EXO 9

(a) Posons $A(-1+i)$. Alors $|z+1-i| = |2+i| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = \sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow AM = \sqrt{5}$$

L'ensemble des points considérés est donc
le cercle de centre A et de rayon $\sqrt{5}$

(b) Prenons $A(-2)$. Alors $|z| = |\bar{z} + 2| \Leftrightarrow |z| = |z + 2| \Leftrightarrow OM = AM$

$\Rightarrow$

Médiatrice du segment $[OA]$

(c) Prenons $A(1+4i)$ et $B(-8)$. Alors $|-1+z-4i| = 2|z+8| \Leftrightarrow AM = 2BM...$
et on verra dans le chapitre de géométrie plane comment gérer ceci...

EXO 10

$$\begin{aligned} 1) \quad (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) &= |x+iy|^2 \times |z+it|^2 = |(x+iy)(z+it)|^2 \\ &= |(xz - yt) + i(xt + yz)|^2 \\ &= (xz - yt)^2 + (xt + yz)^2 \end{aligned}$$

En posant $X = xz - yt$ et $Y = xt + yz \in \mathbb{Z}$, on obtient
bien $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = X^2 + Y^2$

$$2) \quad 34 = 5^2 + 3^2 \quad \text{et} \quad 58 = 7^2 + 3^2$$

$$3) \quad 1972 = 34 \times 58 = (5^2 + 3^2)(7^2 + 3^2) = X^2 + Y^2$$

$$\text{avec } X = 5 \times 7 - 3 \times 3 = 26 \quad \text{et} \quad Y = 5 \times 3 + 3 \times 7 = 36$$

d'après la question 1), c'est-à-dire que

$$1972 = 26^2 + 36^2 \quad \dots \text{quelle trouvaille!}$$

EXO 11

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}\right) = 2e^{i\pi/6} \quad \text{donc} \quad (\sqrt{3} + i)^{10} = 2^{10} e^{5i\pi/3} = \boxed{2^{10} e^{-i\pi/3}}$$

$$|\sqrt{2} + i| = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} \quad \text{donc} \quad \sqrt{2} + i = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + i \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{\sqrt{3} e^{i\theta}} \quad \text{avec } \theta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{si bien que} \quad \frac{7}{\sqrt{2} + i} = \frac{7}{\sqrt{3} e^{i\theta}} = \boxed{\frac{7}{\sqrt{3}} e^{-i\theta}} \quad (\text{cf argument } \in [0, \pi/2])$$

• $|3-4i|=5$ donc $3-4i=5\left(\frac{3}{5}-i\frac{4}{5}\right)=5e^{i\theta}$ avec $\theta=\arcsin(-4/5)$
 • $(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (d'argument $\in [-\pi/2, 0]$)

donc $\frac{3-4i}{(1+i)^2} = \frac{5e^{i\theta}}{2e^{i\pi/2}} = \boxed{\frac{5}{2}e^{i(\theta-\pi/2)}}$

EXO 12

• $1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{-i\pi/3}$ donc $(1-i\sqrt{3})^{1991}=2^{1991}e^{-i\frac{1991\pi}{3}}$

$$\begin{array}{r|l} 1991 & 3 \\ 19 & 663 \\ 11 & \\ 2 & \end{array}$$
 donc $663 < \frac{1991}{3} < 665$

et $\frac{1991\pi}{3} - 664\pi = \frac{1991-1992}{3}\pi = -\frac{\pi}{3}$ donc $\frac{1991\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 664\pi$

si bien que $-\frac{1991\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 664\pi$

Ainsi

$$(1-i\sqrt{3})^{1991} = 2^{1991}e^{i\pi/3}$$

• $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\pi/3}$ et $1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$
 donc $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \sqrt{2}e^{i(\pi/3+\pi/4)} = \sqrt{2}e^{i7\pi/12}$ et $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10} = 2^5e^{i70\pi/12}$

$\frac{70}{12} = \frac{35}{6} = 6 - \frac{1}{6}$ donc $\frac{70\pi}{12} = -\frac{\pi}{6} + 6\pi$ donc $\boxed{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{10} = 32e^{-i\pi/6}}$

• $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i=\sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ donc $(1+i)^4 = 4e^{i\pi}$ et $(1-i)^3 = 2\sqrt{2}e^{-3i\pi/4}$
 donc $\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} = \sqrt{2}e^{i7\pi/4} = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ (car $\frac{7\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi$) et $\frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ (conjugue)

Or $\sqrt{2}e^{-i\pi/4} + \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \times 2 \cos \pi/4 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$ si bien que

$$\boxed{\frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3} = 2}$$

• $i = e^{i\pi/2}$ et $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$ donc $\frac{i}{1+i} = \frac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2} e^{i\pi/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4}$ et $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = 2^{-1002} e^{i501\pi}$
 Or $e^{501i\pi} = e^{i\pi} = -1$ d'où

$$\boxed{\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004} = -2^{-1002}}$$

EXO 13

ASTUCE : $1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = \frac{1-u^7}{1-u} = 0$ car $u^7 = (e^{2i\pi/7})^7 = e^{2i\pi} = 1$

Ainsi $S+T = u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 = -1$

et $ST = (u + u^2 + u^4)(u^3 + u^5 + u^6) = u^4 + u^6 + u^7 + u^5 + u^7 + u^8 + u^7 + u^9 + u^{10}$
 (on utilise $u^7 = 1$
 donc $u^8 = u$, $u^9 = u^2$ et $u^{10} = u^3$)

$$= u^4 + u^6 + 1 + u^5 + 1 + u + 1 + u^2 + u^3 = 2 + (1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6) = 2$$

On obtient donc $S+T = -1$ et $ST = 2$

Ainsi $T = -1 - S$ et $2 = S(-1 - S) = -S - S^2$ soit $S^2 + S + 2 = 0$

$\Delta = 1 - 8 = -7 = (i\sqrt{7})^2 \rightsquigarrow$ racines : $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$

Comme S et T sont les deux racines de $X^2 + X + 2$, ces complexes valent $-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}$ et $-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$. Pour les identifier, on va regarder leurs parties imaginaires

$S = u + u^2 + u^4 = e^{2i\pi/7} + e^{4i\pi/7} + e^{8i\pi/7}$ donc $\text{Im}(S) = \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right)$
 $= \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ $\left(\frac{8\pi}{7} = \pi + \frac{\pi}{7}\right)$

Or $0 < \frac{\pi}{7} < \frac{2\pi}{7} < \frac{\pi}{2}$ donc $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) > \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)$ par croissance de $\sin$ sur $[0, \pi/2]$

et $0 < \frac{4\pi}{7} < \pi$ donc $\sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) > 0$, si bien que $\text{Im}(S) > 0$

Il en découle ainsi que

$$\boxed{S = -\frac{1+i\sqrt{7}}{2} \text{ et } T = -\frac{1-i\sqrt{7}}{2}}$$

EXO 14

• $u = e^{i\theta}$ donc $\frac{1}{u} = \bar{e}^{-i\theta}$ (module = 1, argument = $-\theta$)

puis $-\frac{1}{u} = e^{i\pi} \times \frac{1}{u} = e^{i(\pi-\theta)}$ (module = 1, argument = $\pi-\theta$)

• $\frac{u-1}{u+1} = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}-e^{-i\theta/2})}{e^{i\theta/2}(e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2})} = \frac{2i \sin(\theta/2)}{2 \cos(\theta/2)} = i \tan(\theta/2)$ (u $\neq -1$ c'est $\theta \neq \pi + 2k\pi$)
 $= \tan(\theta/2) e^{i\pi/2}$

* Si $\tan(\theta/2) > 0$: module = $\tan(\theta/2)$, argument = $\pi/2$

* Si $\tan(\theta/2) < 0$: $\frac{u-1}{u+1} = -\tan(\theta/2) \times (-i) = -\tan(\theta/2) e^{-i\pi/2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{module} = -\tan(\theta/2) \\ \text{argument} = -\pi/2 \end{array} \right.$

• $\frac{u+1}{u-1} = \frac{1}{i} \cotan(\theta/2) = \cotan(\theta/2) e^{-i\pi/2}$ (u $\neq 1$ c'est $\theta \neq 2k\pi$)
 en notant $\cotan = \cos/\sin$

* Si $\cotan(\theta/2) > 0$: module = $\cotan(\theta/2)$, argument = $-\pi/2$

* Si $\cotan(\theta/2) < 0$: $\frac{u+1}{u-1} = -\cotan(\theta/2) i = -\cotan(\theta/2) e^{i\pi/2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{module} = -\cotan(\theta/2) \\ \text{argument} = \pi/2 \end{array} \right.$

EXO 15

1) $z_1 = \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/6}$

$z_2 = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} e^{-i\pi/4}$

si bien que $z_1/z_2 = e^{i(\pi/4-\pi/6)} = e^{i\pi/12}$

2) Or $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1+i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1-i)}{2 \times |1-i|^2} = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{6}-i\sqrt{2}+\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Comme $e^{i\pi/12} = \cos(\pi/12) + i \sin(\pi/12)$, on en déduit que

$$\cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

EXO 16

1) $\Delta = 4(1+2\cos\theta)^2 - 4(5+4\cos\theta) = 4(1+4\cos\theta+4\cos^2\theta-5-4\cos\theta)$
 $= 4(4\cos^2\theta-4) = 16(\cos^2\theta-1) = -16\sin^2\theta$

d'où $\Delta = (4i \sin \theta)^2$. On prend donc $\delta = 4i \sin(\theta)$: les solutions de notre équation sont

$$z_1 = \frac{2(1+2\cos\theta) - 4i\sin\theta}{2} = 1 + 2(\cos\theta - i\sin\theta) = \boxed{1 + 2e^{-i\theta}}$$

et $z_2 = \frac{2(1+2\cos\theta) + 4i\sin\theta}{2} = \boxed{1 + 2e^{i\theta}} = \bar{z}_1$

2) $\triangle$ C'EST N'EST PAS UNE EQUATION DU 2^d DEGRÉ À CAUSE DES z ET $\bar{z}$

$\Rightarrow$ ON POSE $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ et $\bar{z} = x - iy$, de sorte que

$$(E) \quad z^2 - \bar{z} + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy - x + iy + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 - x + 2 + i(2xy + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - x + 2 = 0 \\ (2x+1)y = 0 \end{cases}$$

Or $(2x+1)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ ou $x = -1/2$

1^{er} cas

Si $y = 0$, $(E) \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0$. $\Delta = 1 - 8 < 0 \Rightarrow$ pas de solution sur $\mathbb{R}$ (et $x \in \mathbb{R}$!) Dans ce cas, (E) n'admet pas de solution.

2nd cas

Si $x = -1/2$, $(E) \Leftrightarrow \frac{1}{4} - y^2 + \frac{1}{2} + 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow y = \pm \frac{\sqrt{11}}{2}$
 $\Rightarrow z = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$ ou $z = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$

Conclusion: l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2} \right\}$$

3). Pour $\sin(\alpha) = 0$, on a $\cos^2(\alpha) = 1$ et l'équation devient $5 = 0$: pas de solution.

• Pour $\sin(\alpha) \neq 0$, on obtient une "vraie" équation du 2nd degré et on peut appliquer nos bonnes vieilles recettes !

$$\Delta = 16 \sin^2 \alpha - 4 \sin^2 \alpha (4 + \cos^2 \alpha) = -4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2i \sin \alpha \cos \alpha)^2$$

On prend donc $\delta = 2i \sin \alpha \cos \alpha$ et on obtient pour solutions

$$z_1 = \frac{4 \sin \alpha - 2i \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin^2 \alpha} = \boxed{\frac{1}{2 \sin \alpha} - i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = \boxed{\frac{1}{2 \sin \alpha} + i \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}$$

$$4) \Delta = (3+4i)^2 - 4(5i-1) = 9-16+24i-20i+4 = -3+4i$$

On recherche δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\text{Alors } \delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = -3+4i \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \text{ et } y=2 \\ x=-1 \text{ et } y=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \delta = \pm (1+2i)$$

On prend $\delta = 1+2i$. Les solutions de notre équation sont alors

$$z_1 = \frac{3+4i-1-2i}{2} = \boxed{1+i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{3+4i+1+2i}{2} = \boxed{2+3i}$$

$$5) \Delta = (5+i)^2 - 4(1+i)(6+4i) = 25-1+10i-4(6+4i+6i-4) \\ = 24+10i-8-40i = 16-30i = 2(8-15i)$$

On recherche δ sous la forme $\delta = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, de sorte que

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} \delta^2 = \Delta \\ |\delta|^2 = |\Delta| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + 2ixy = 16-30i \\ x^2 + y^2 = 2\sqrt{64+225} = 2 \times \sqrt{289} = 2 \times 17 = 34 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x^2 - y^2 = 16 \\ 2xy = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 25 \\ y^2 = 9 \\ xy = -15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \text{ et } y=-3 \\ x=-5 \text{ et } y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \delta = \pm (5-3i)$$

$$2i = (1+i)^2$$

$$\text{On prend } \delta = 5-3i, \text{ ce qui nous conduit à } z_1 = \frac{5+i-(5-3i)}{2(1+i)} = \frac{2i}{2(1+i)} = \frac{1+i}{1+i} = \boxed{1+i} \\ \text{et } z_2 = \frac{5+i+5-3i}{2(1+i)} = \frac{10-2i}{2(1+i)} = \frac{5-i}{1+i} = \frac{(5-i)(1+i)}{(1+i)(1+i)} = \frac{5-1-i-5i}{2} = \boxed{2-3i}$$

$$6) \Delta = \alpha^2(\alpha+i)^2 - 4i\alpha^3 = \alpha^2((\alpha+i)^2 - 4i\alpha) = \alpha^2(\alpha^2 + 2i\alpha + i^2 - 4i\alpha) \\ = \alpha^2(\alpha^2 - 2i\alpha + i^2) = \alpha^2(\alpha-i)^2$$

donc on peut prendre $S = \alpha(\alpha-i)$. Les solutions de l'équation sont alors

$$z_1 = \frac{\alpha(\alpha+i) - \alpha(\alpha-i)}{2} = \boxed{i\alpha} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{\alpha(\alpha+i) + \alpha(\alpha-i)}{2} = \boxed{\alpha^2}$$

7) Pour $z \neq -2$, on pose $Z = \frac{z-3i}{z+2i}$; l'équation devient $Z^2 - 6Z + 13 = 0$

$$\Delta = 36 - 52 = -16 = (4i)^2 \Rightarrow \text{solutions: } z_1 = \frac{6-4i}{2} = 3-2i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

1^{re} cas

$$z = 3-2i \Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+2i} = 3-2i \Leftrightarrow z-3i = (3-2i)z + 6i + 4$$

$$\Leftrightarrow (2-2i)z = -4-9i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{-4-9i}{2(1-i)} = \frac{(-4-9i)(1+i)}{2 \times 2} = \frac{-4-4i-9i+9}{4} = \boxed{\frac{5-13i}{4}}$$

2nd cas

$$z = 3+2i \Leftrightarrow \frac{z-3i}{z+2i} = 3+2i \Leftrightarrow z-3i = (3+2i)z + 6i - 4$$

$$\Leftrightarrow (2+2i)z = 4-9i$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{4-9i}{2(1+i)} = \frac{(4-9i)(1-i)}{2 \times 2} = \frac{4-4i-9i-9}{4} = \boxed{\frac{-5-13i}{4}}$$

Les solutions de l'équation sont donc $\frac{5-13i}{4}$ et $\frac{-5-13i}{4}$

8) Posons $Z = z^2$: alors $z^4 - 32z^2 - 144 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 32Z - 144 = 0$

$$\Delta = 32^2 + 4 \times 144 = 4(16^2 + 144) = 4 \times (256 + 144) = 4 \times 400 = (40)^2$$

Les solutions de l'équation du second degré sont alors $z_1 = \frac{32-40}{2} = -4$

et $z_2 = \frac{32+40}{2} = 36$. Comme $Z = z^2$, on en déduit enfin que

$$z^2 = -4 \quad \text{ou} \quad z^2 = 36, \text{ soit } z = \boxed{-2i, 2i, -6 \text{ ou } 6}$$

EXO 17

$$1) \bullet \cos(\theta) (1 + i \tan(\theta)) = \cos(\theta) + i \sin(\theta) = e^{i\theta}$$

$$\text{donc } (\cos a \cos b \cos c) z = e^{i(a+b+c)}$$

$$\bullet z = (1 - \tan a \tan b + i(\tan a + \tan b))(1 + i \tan c)$$

$$\operatorname{Im}(z) = \tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c$$

$$= \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a \cos b \cos c}$$

$$\text{cf. } z = \frac{e^{i(a+b+c)}}{\cos a \cos b \cos c}$$

$$2) \text{ De fait, } \tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow \sin(a+b+c) = 0$$

$$\Leftrightarrow a+b+c = k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$3) a = \frac{5\pi}{12}, b = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{12}, c = \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{12} : \text{ alors } a+b+c = \pi$$

$$\text{donc } \tan a + 1 + \sqrt{3} = \sqrt{3} \tan(a) \text{ d'après Q2)}$$

$$\text{soit } 1 + \sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1) \tan(a)$$

$$\text{et } \tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} = \boxed{2+\sqrt{3}}$$

$$\tan \frac{\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{\tan \frac{5\pi}{12}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \boxed{2-\sqrt{3}}$$

EXO 18

$$(a) (a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)^2 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$\text{donc } \cos^4(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4 = \frac{e^{4ix} + 4e^{2ix} + 6 + 4e^{-2ix} + e^{-4ix}}{16}$$

$$= \frac{2\cos(4x) + 8\cos(2x) + 6}{16} = \boxed{\frac{1}{8}\cos(4x) + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{3}{8}}$$

$$(b) (a+b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$\text{donc } \sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}}{-8i} = \frac{2i\sin(3x) - 6i\sin(x)}{-8i}$$

soit $\boxed{\sin^3(x) = \frac{3}{4}\sin(x) - \frac{1}{4}\sin(3x)}$

(c) $1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$ donc $\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \sin^2(x) \cos^2(x) = (\sin x \cos x)^2$
 $\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{4} \sin^2(2x)$

or $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$
 donc $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ d'où $\sin^2(2x) = \frac{1 - \cos(4x)}{2}$

Ainsi $\boxed{\frac{\sin^2(x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\cos(4x)}$

(d) $\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4}$

donc $\sin(x) \cos^2(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \times \frac{e^{2ix} + 2 + e^{-2ix}}{4} = \frac{e^{3ix} + 2e^{ix} - e^{-ix} - 2e^{-3ix}}{8i}$
 $= \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{8i} + \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4} = \boxed{\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(x)}$

(e) $\cos(x) \sin(3x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \times \frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{2i} = \frac{e^{4ix} - e^{-4ix}}{4i} + \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i}$
 $= \boxed{\frac{1}{2}\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(2x)}$

EXO 19

$e^x \cos(2x) = e^x \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2} e^{(1+i)x} + \frac{1}{2} e^{(1-i)x}$

PRIMITIVE : $\frac{e^{(1+i)x}}{2(1+i)} + \frac{e^{(1-i)x}}{2(1-i)} = \frac{(1-i)e^{(1+i)x} + (1+i)e^{(1-i)x}}{2(1+i)(1-i)}$

$= \frac{e^x}{4} \left((1-i)e^{ix} + (1+i)e^{-ix} \right) = \frac{e^x}{4} \left(\underbrace{e^{ix} + e^{-ix}}_{2\cos(x)} - i \underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{2i\sin(x)} \right)$
 $= \boxed{\frac{1}{2}e^x (\cos(x) + \sin(x))}$