CHAPITRE 7

EXO 1

- Le nombre $f(x)$ est défini lorsque $x^2+x+1\neq 0$ (à cause du quotient)
  Or ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 1-4<0$, donc il ne s'annule jamais
  AINSI $\boxed{\mathcal{D}_f=\mathbb{R}}$
- Le nombre $g(x)$ est défini lorsque $1+\cos(x)\geqslant 0$ (à cause de la racine)
  Or $\cos(x)\geqslant -1$ donc $1+\cos(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$
  AINSI $\boxed{\mathcal{D}_g=\mathbb{R}}$
- Le nombre $h(x)$ est défini lorsque $1+x\neq 0$ (quotient) et $\frac{1-x}{1+x}\geqslant 0$ (racine)
  Dressons un tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{1+x}{1-x}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

AINSI $\boxed{\mathcal{D}_h=]-1;1]}$

EXO 2

Le but est ici de déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

(a) Pour $x>0$

$$\begin{aligned} f(x)>g(x) &\iff x^2>\sqrt{x} \\ &\iff x^4>x \\ &\iff x^3>1=1^3 \\ &\iff x>1 \quad \text{par croissance de la fonction cube} \end{aligned}$$

AINSI $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur } [1;+\infty[\text{ et en dessous sur } [0;1]}$

(b) Pour $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x)>g(x) &\iff 2x+3>x \\ &\iff x>-3 \end{aligned}$$

AINSI $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g \text{ sur } [-3;+\infty[\text{ et en-dessous sur }]-\infty;-3]}$

EXO 3

1) Pour $x \neq 0$ $\quad f \circ f(x) = f(f(x)) = f(1/x) = 1/(1/x) = x$

donc $\boxed{f \circ f = Id_{\mathbb{R}^*}}$, ce qui montre que f est une bijection et que $f^{-1} = f$

2) Pour $x \in \mathbb{R}$ $\quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 5x^2 - 8$

et $\quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(5x-8) = (5x-8)^2 = 25x^2 - 80x + 64$

... ce qui permet de rappeler que $\boxed{f \circ g \neq g \circ f}$

EXO 4

- $f_1 : x \longmapsto x^2$ est $\searrow$ sur $]-\infty; 0]$ donc $f_2 : x \longmapsto -x^2$ est $\nearrow$ sur $]-\infty; 0]$

  $f_3 : x \longmapsto 2x$ est $\nearrow$ sur $]-\infty, 0]$ car $2 > 0$

  Par somme, $\quad \underline{f = f_2 + f_3 \text{ est } \nearrow \text{ sur }]-\infty, 0]}$

- $g_1 : x \longmapsto x$ est $\nearrow$ et $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$

  $g_2 : x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\nearrow$ et $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$

  Par produit, $\quad \underline{g = g_1 \times g_2 \text{ est } \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+}$

- $h_1 : x \longmapsto x^2$ est $\nearrow$ sur $]0, +\infty[$

  $h_2 : x \longmapsto 3x + 5$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

  Par composée $h_3 = h_2 \circ h_1$ est $\nearrow$ sur $]0, +\infty[$ et de surcroît > 0

  $h_4 : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est $\searrow$ sur $]0, +\infty[$

  Par composée $\quad \underline{h = h_4 \circ h_3 \text{ est } \searrow \text{ sur }]0, +\infty[}$

- $k_1 : x \longmapsto \cos(x)$ est $\searrow$ sur $[0, \pi]$ donc $k_2 : x \longmapsto 1 - \cos(x)$ est $\nearrow$ sur $[0, \pi]$

  $k_3 : x \longmapsto \sqrt{x}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+$. Comme $k_2(x) \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$,

  par composée $\quad \underline{k = k_3 \circ k_2 \text{ est } \nearrow \text{ sur } [0, \pi]}$

EXO 5

1) D'après les tableaux $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v = [0,3]$

2) Sur $[0,2]$
   - $*$ v est décroissante et $v(x) \in [1;3]$ pour tout $x \in [0,2]$
   - $*$ u est décroissante sur $[1,3]$

   PAR COMPOSITION $u \circ v$ est croissante sur $[0,2]$

   Sur $[2,3]$
   - $*$ v est croissante et $v(x) \in [1,2]$ pour tout $x \in [2,3]$
   - $*$ u est décroissante sur $[1,2]$

   PAR COMPOSITION $u \circ v$ est décroissante sur $[2,3]$

$u \circ v(0) = u(v(0)) = u(3) = 0$
$u \circ v(2) = u(v(2)) = u(1) = 2$
$u \circ v(3) = u(v(3)) = u(2) = 1$

x	0		2		3
$u \circ v(x)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

3) Sur $[0,1]$ $\begin{cases} * \ u \text{ est croissante et à valeurs dans } [0,2] \\ * \ v \text{ est décroissante sur } [0,2] \end{cases}$

   PAR COMPOSITION $v \circ u$ est décroissante sur $[0,1]$

   Sur $[1,3]$ $\begin{cases} * \ u \text{ est décroissante et à valeurs dans } [0,2] \\ * \ v \text{ est décroissante sur } [0,2] \end{cases}$

   PAR COMPOSITION $v \circ u$ est croissante sur $[1,3]$

$v \circ u(0) = v(0) = 3$
$v \circ u(1) = v(2) = 1$
$v \circ u(3) = v(0) = 3$

x	0		1		3
$v \circ u(x)$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

EXO 6

- f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0
- De plus, $f(-x) = (1-x)^n(1+x)^n = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$

EXO 7

- Sur $[-4,0]$

  u est décroissante à valeurs dans $[3,6]$ \
  v est croissante sur $[3,6]$ } $v \circ u$ est décroissante

- Sur $[0,1]$

  u est décroissante à valeurs dans $[-2;3]$ \
  v est décroissante sur $[-2;3]$ } $v \circ u$ est croissante

- Sur $[1,5]$

  u est croissante à valeurs dans $[-2;3]$ \
  v est décroissante sur $[-2;3]$ } $v \circ u$ est décroissante

Sur $[5;10]$

  u est décroissante à valeurs dans $[0;3]$ \
  v est décroissante sur $[0;3]$ } $v \circ u$ est croissante

x	-4		0		1		5		10
$v \circ u$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	7	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

Et voilà le travail !

EXO 8

1) (a) $f(x) = g(x) + h(x)$ et $f(-x) = g(-x) + h(-x)$

$= g(x) - h(x)$ grâce aux parités

(b) De ce fait $\begin{cases} g(x)+h(x)=f(x) \\ g(x)-h(x)=f(-x) \end{cases}$ soit $\boxed{g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}}$ et $\boxed{h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

Ceci prouve l'unicité des fonctions g et h

2) Définissons sur $\mathbb{R}$ les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2g(-x)=f(-x)+f(x)=2g(x)$ donc g est paire

$2h(-x)=f(-x)-f(x)=-2h(x)$ donc h est impaire

et $g(x)+h(x)=f(x)$ donc $f=g+h$

Ceci montre qu'il existe une fonction paire g et une fonction impaire h telles que $f=g+h$

EXO 9

1) Pour $x\in\mathbb{R}$ $f(-x)=\dfrac{-x}{x^2+1}=-f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$

2) $[-2;3]$ n'est pas symétrique par rapport à 0 donc $\boxed{g \text{ n'est ni paire, ni impaire}}$

3) Pour $x\in[-1;1]$ $h(-x)=x^2-x+1$ qui n'est égal ni à $h(x)$, ni à $-h(x)$

C-exple : $h\left(\frac{1}{2}\right)=7/4$ $h(-1/2)=5/4$ donc $\boxed{h \text{ n'est ni paire, ni impaire}}$

4) Les fonctions polynomiales paires sont celles ne contenant que des puissances paires, et les impaires celles ne contenant que des puissances impaires

EN EFFET si $P(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n}x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$

alors $P(-x)=\sum_{n\geq 0} a_{2n}x^{2n} - \sum_{n\geq 0} a_{2n+1}x^{2n+1}$

donc $\left[\begin{array}{l} P \text{ paire} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=P(-x) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ a_{2n+1}=0 \\ P \text{ impaire} \Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R},\ P(-x)=-P(x) \Leftrightarrow \forall n\in\mathbb{N}\ a_{2n}=0 \end{array}\right.$

EXO 10

1) Si f est paire, on a $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où en dérivant $-f'(-x) = f'(x)$ — — : $\boxed{f' \text{ est impaire}}$

2) • Si f est impaire, on a $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où en dérivant $-f'(-x) = -f'(x)$ — — —
soit $f'(-x) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{f' \text{ est paire}}$

• Si f est T-périodique, on a $f(x+T) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
soit en dérivant $f'(x+T) = f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique}}$

EXO 11

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x/3) = \cos(x/3 + 2\pi) = \cos\left(\frac{x+6\pi}{3}\right)$
$= f(x+6\pi)$
donc la fonction f est 6π-périodique

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x+\pi) = (-\sin(x))^2 = \sin^2(x) = g(x)$
donc la fonction g est π-périodique

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x+\pi) = (-\sin x) \times (-\cos x) = \sin(x)\cos(x) = h(x)$
donc la fonction h est π-périodique

EXO 12

Notons $T > 0$ une période de f et $\ell = \lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$

Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction n'est pas constante : il existe alors a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) \neq f(b)$. Pour établir notre contradiction, on va maintenant définir deux suites (u_n) et (v_n) par $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = a + nT$ et $v_n = b + nT$

D'une part, $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ (car $T>0$)

si bien que $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \ell$ (composition de limites)

Or la fonction f étant T-périodique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$f(u_n) = f(a+nT) = f(a)$ et $f(v_n) = f(b+nT) = f(b)$

On en déduit par passage à la limite que $\ell = f(a)$ et $\ell = f(b)$

d'où $f(a) = f(b)$: CONTRADICTION !

Ceci montre que la fonction f est nécessairement constante