CHAPITRE 8

EXO 1

1) $f : x \mapsto x^2-6x+20$ définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 3

Notons que $f(x) = x^2-6x+9+11 = (x-3)^2+11$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

De ce fait, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$f(3+h) = h^2+11 \quad \text{et} \quad f(3-h) = h^2+11 = f(3+h)$$

si bien que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta : x=3$

2) x^2-x+1 ne s'annule jamais $(\Delta<0)$ donc $g : x \mapsto \dfrac{x^2-x-2}{x^2-x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}$, ensemble symétrique par rapport à $1/2$

De plus, $x^2-x+1 = x^2-x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

et $x^2-x-2 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-3 = \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 9/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

de sorte que $$g(x) = \frac{(x-1/2)^2-9/4}{(x-1/2)^2+3/4} \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}$$

De ce fait, on a pour tout $h \in \mathbb{R}$

$$g\left(\frac{1}{2}+h\right) = \frac{h^2-9/4}{h^2+3/4} \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}-h\right) = \frac{h^2-9/4}{h^2+3/4} = g(1/2+h)$$

si bien que $\mathcal{C}_g$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta : x = 1/2$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, ensemble symétrique par rapport à 1

De plus, $x^2-2x-1 = x^2-2x+1-2 = (x-1)^2-2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

de sorte que $f(x) = \dfrac{(x-1)^2-2}{(x-1)^2}$ pour tout $x \neq 1$

On a ainsi pour tout $h \in \mathbb{R}^*$ $\quad f(1+h) = \dfrac{h^2-2}{h^2} = f(1-h)$

si bien que $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à la droite $\Delta : x=1$

EXO 2

1) $f : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x+1}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1/2\}$, symétrique par rapport à $-1/2$

Pour tout $h \neq 0$, $f\left(-\frac{1}{2}+h\right) = \dfrac{3\left(-\frac{1}{2}+h\right)-1}{2\left(-\frac{1}{2}+h\right)+1} = \dfrac{3h-5/2}{2h} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{4h}$

si bien que $f\left(-\frac{1}{2}-h\right) = \frac{3}{2} + \frac{5}{4h}$ et $f\left(\boxed{-\frac{1}{2}}+h\right) + f\left(\boxed{-\frac{1}{2}}-h\right) = 2 \times \boxed{3/2}$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A\left(-\frac{1}{2} ; \frac{3}{2}\right)$

2) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{7}{6}$ est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à $-1/2$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}+h\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}+h\right)^3 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+h\right)^2 - 2\left(-\frac{1}{2}+h\right) + 7/6$$

$$= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8} + \frac{3h}{4} - \frac{3h^2}{2} + h^3\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - h + h^2\right) + 1 - 2h + \frac{7}{6}$$

$$= -\frac{1}{24} + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{1}{8} - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{2} + 1 - 2h + 7/6$$

$$= \frac{1}{24}(-1+3+24+28) + \frac{h}{4}(1-2-8) + \frac{h^3}{3}$$

$$= \frac{54}{24} - \frac{9h}{4} + \frac{h^3}{3} = \frac{9}{4} - \frac{9h}{4} + \frac{h^3}{3} \quad \text{pour tout } h \in \mathbb{R}$$

donc $f\left(-\frac{1}{2}-h\right) = \frac{9}{4} + \frac{9h}{4} - \frac{h^3}{3}$ et $f\left(\boxed{-\frac{1}{2}}+h\right) + f\left(\boxed{-\frac{1}{2}}-h\right) = 2 \times \boxed{\frac{9}{4}}$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A(-1/2, 9/4)$

3) $f : x \mapsto \dfrac{x^2-2}{x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, symétrique par rapport à 1

Pour $h \neq 0$, $f(1+h) = \dfrac{(1+h)^2-2}{h} = \dfrac{h^2+2h-1}{h} = h + 2 - \dfrac{1}{h}$

donc $f(1-h) = -h + 2 - \dfrac{1}{h}$ et $f(\boxed{1}+h) + f(\boxed{1}-h) = 2 \times \boxed{2}$

De ce fait, la courbe $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à $A(1;2)$

EXO 3

1) $f : x \mapsto -1 + \frac{2}{3x-1}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1/3\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1$ donc $\Delta_1 : y = -1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 1/3 \\ x > 1/3}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1/3 \\ x < 1/3}} f(x) = -\infty$ donc $\Delta_2 : x = 1/3$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$

2) $g : x \mapsto \frac{5-2x}{3x+1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = -\frac{2}{3}$ donc $\Delta_1 : y = -2/3$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1/3 \\ x > -1/3}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1/3 \\ x < -1/3}} g(x) = -\infty$ donc $\Delta_2 : x = -1/3$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$

3) $h : x \mapsto 2 - 5x + \frac{3}{x+4}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3}{x+4} = 0$ donc $\Delta_1 : y = 2 - 5x$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x > -4}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x < -4}} h(x) = -\infty$ donc $\Delta_2 : x = -4$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$

4) $j : x \mapsto \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\begin{array}{r|l} x^2 + x + 1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -(x^2 - x) & x + 2 \\ \hline 2x + 1 & \\ -(2x - 2) & \\ \hline 3 & \end{array}$$

De plus, $x^2 + x + 1 = (x+2)(x-1) + 3$

si bien que $\boxed{j(x) = x + 2 + \frac{3}{x-1}}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

On en déduit comme précédemment que $\mathcal{C}_j$ admet pour asymptotes les droites $\Delta_1 : y = x + 2$ (en $+\infty$ et en $-\infty$) et $\Delta_2 : x = 1$

5) $R(x) = x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$ pour $x \neq 0$ donc sa courbe $\mathcal{C}_R$ admet pour asymptotes les droites $\Delta_1 : y = x+1$ (en $\pm\infty$) et $\Delta_2 : x = 0$

6) l est définie sur $\mathbb{R}_+$ et $l(x) = \frac{x\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+1}{1+\sqrt{x}} = \frac{x\sqrt{x}+x-(\sqrt{x}+1)+2}{1+\sqrt{x}}$

$= x-1+\frac{2}{1+\sqrt{x}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc sa courbe $\mathcal{C}_l$ admet la droite $\Delta : y = x-1$ pour asymptote en $+\infty$

EXO 4

C'est comme l'exercice 2 !

COURBE DE f

- Les asymptotes se coupent en $A(1/3, -1)$
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$ est symétrique par rapport à $1/3$
- Pour $h \neq 0$, on a $f(1/3+h) = -1+\frac{2}{3h}$ et $f(\frac{1}{3}-h) = -1-\frac{2}{3h}$

d'où $f(\boxed{\frac{1}{3}}+h)+f(\boxed{\frac{1}{3}}-h) = 2\times\boxed{-1}$

AINSI la courbe de f admet le point $A(1/3; -1)$ pour centre de symétrie

COURBE DE g

- Les asymptotes se coupent en $B(-1/3; -2/3)$
- $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-1/3\}$ est symétrique par rapport à $-1/3$
- Pour $h \neq 0$, on a : $g(-1/3+h) = \frac{5+2/3-2h}{3h} = \frac{-2}{3}+\frac{17}{9h}$ et $g(-1/3-h) = \frac{-2}{3}-\frac{17}{9h}$

d'où $g(\boxed{-\frac{1}{3}}+h)+g(\boxed{-\frac{1}{3}}-h) = 2\times(\boxed{-\frac{2}{3}})$

AINSI la courbe de g admet le point $B(-1/3; -2/3)$ pour centre de symétrie

COURBE DE h

. Les asymptotes se coupent en $C(-4;22)$

. $\mathcal{D}_h = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$ est symétrique par rapport à -4

. Pour $u \neq 0$, on a $h(-4+u) = 22-5u+\frac{3}{u}$ et $h(-4-u) = 22+5u-\frac{3}{u}$

d'où $h(\boxed{-4}+u)+h(\boxed{-4}-u) = 2\times\boxed{22}$

AINSI la courbe de h est symétrique par rapport à $C(-4;22)$

COURBE DE j

. Les asymptotes se coupent en $D(1;3)$

. $\mathcal{D}_j = \mathbb{R}\setminus\{1\}$ est symétrique par rapport à 1

. Pour $u \neq 0$, on a $j(1+u) = \frac{(1+u)^2+(1+u)+1}{u} = \frac{u^2+3u+3}{u} = u+3+\frac{3}{u}$

donc $j(1-u) = -u+3-\frac{3}{u}$ et $j(\boxed{1}+u)+j(\boxed{1}-u) = 2\times\boxed{3}$

AINSI la courbe de j est symétrique par rapport à $D(1;3)$

EXO 5

1) Pour $x>0$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+4x+3}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$

et $f(x)-x = \sqrt{x^2+4x+3}-x = \frac{x^2+4x+3-x^2}{\sqrt{x^2+4x+3}+x} = \frac{4x+3}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+x} = \frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 2$

AINSI $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+2)]=0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la droite $\Delta_1 : y=x+2$ pour asymptote en $+\infty$

Pour $x<0$, les calculs sont semblables mais $x=-\sqrt{x^2}$... ce qui change les résultats

On trouve $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=-2$ et $\mathcal{C}_f$ admet $\Delta_2 : y=-x-2$ pour asymptote en $-\infty$

2). Pour $x>0$, $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite $\Delta_1 : y=0$ pour asymptote en $+\infty$

• Pour $x<0$, $g(x) = \sqrt{x^2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} - x = -x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right) \underset{x\to-\infty}{\sim} -2x$

et $g(x)+2x = \sqrt{x^2+1}+x = \dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$

donc la courbe $\mathcal{C}_g$ admet la droite $\Delta_2 : y=-2x$ pour asymptote en $-\infty$

3) Posons la division euclidienne: $\longrightarrow$

$$\begin{array}{r|l} x^3+9 & x^2-1 \\ \hline -(x^3-x) & x \\ x+9 & \end{array}$$

$x^3+9 = x(x^2-1) + x+9$

donc $\boxed{h(x) = x + \dfrac{x+9}{x^2-1}}$ pour $|x|\neq 1$

• $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+9}{x^2-1} = 0$ (cf equivalent $1/x$) donc $\Delta_1 : y=x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_h$ en $+\infty$ et en $-\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} h(x) = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} h(x) = -\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} h(x) = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} h(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\Delta_2 : x=1$ et $\Delta_3 : x=-1$ sont asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_h$

FINALEMENT la division euclidienne permet d'étudier h à peu près aussi facilement qu'une fonction d'expression $\boxed{ax+b+\dfrac{c}{x-x_0}}$

EXO6

1) Comme $f : x \mapsto ax^2+bx+c$, alors $f' : x \mapsto 2ax+b$
donc les conditions imposées à f et f' nous conduisent à

$$\begin{cases} f(0) = c = 2 \\ f(-1) = a-b+c = 5 \\ f'(-1) = -2a+b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ a-b=3 \\ -2a+b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ -a=5 & (L2)+(L3) \\ a-b=3 & (L2) \end{cases}$$

d'où $\underline{a=-5}$, $b=a-3=\underline{-8}$ et $\underline{c=2}$

Au passage, $f : x \mapsto -5x^2-8x+2$

2) Cette tangente a pour équation $y = f'(-1)(x+1)+f(-1) = 2(x+1)+5$
soit $\underline{y = 2x+7}$

EXO7

1) Commençons par déterminer leur point d'intersection $I(x,y)$.
Ses coordonnées vérifient $\begin{cases} y = -x^2+\frac{7x}{2}-\frac{1}{2} & (L1) \\ y = 2x^2-\frac{5x}{2}+\frac{5}{2} & (L2) \end{cases}$

d'où $3x^2-6x+3=0$ $\quad (L2)-(L1)$

soit $x^2-2x+1=(x-1)^2=0$ et $x=1$.

Il en découle que $y = 2-5/2+5/2 = 2$: effectivement, les deux paraboles ont un unique point d'intersection, le point $I(1,2)$

2) Déterminons les tangentes en I

1ère courbe : $f : x \mapsto -x^2+\frac{7x}{2}-\frac{1}{2}$ et $f' : x \mapsto -2x+\frac{7}{2}$ donc $f'(1) = \frac{3}{2}$

2de courbe : $g : x \mapsto 2x^2-\frac{5}{2}x+\frac{5}{2}$ et $g' : x \mapsto 4x-\frac{5}{2}$ donc $g'(1) = \frac{3}{2}$

AINSI les deux tangentes en I ont la même pente $3/2$: elles sont donc parallèles
Comme elles ont un point commun, elles sont confondues !

EXO 8

1) Comme $f : x \mapsto a + \frac{b}{x+c}$, on a $f' : x \mapsto \frac{-b}{(x+c)^2}$ donc les conditions imposées à la fonction f se traduisent par

$$\begin{cases} f(0) = a + \frac{b}{c} = -3 \\ f(2) = a + \frac{b}{c+2} = 0 \\ f'(2) = \frac{-b}{(c+2)^2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = (c+2)^2 \quad (\text{grâce à } f'(2)) \\ a + c + 2 = 0 \\ a + \frac{(c+2)^2}{c} = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = (c+2)^2 \\ a = -(c+2) \\ -c(c+2) + (c+2)^2 = -3c \end{cases}$$

$(c+2)(c+2-c) = -3c$
$\Leftrightarrow 2(c+2) + 3c = 0$
$\Leftrightarrow 5c + 4 = 0$
$\Leftrightarrow c = -4/5$

AINSI $c = -4/5$, $a = -6/5$ et $b = 36/25$, d'où $\boxed{f : x \mapsto \frac{-6}{5} + \frac{36}{25x-20}}$

2) Cette tangente a pour équation $y = f'(2)(x-2) + f(2) = -(x-2)$
soit $\boxed{y = 2 - x}$

EXO 9

Notons $f : x \mapsto \frac{3-3x}{2x+1}$ la fonction de courbe représentative $\mathcal{H}$.
La tangente au point d'abscisse a ayant pour pente $f'(a)$, on cherche donc les réels a tels que $f'(a) = -1$

OR $f'(x) = \frac{-3 \times (2x+1) - (3-3x) \times 2}{(2x+1)^2} = \frac{-6x-3-6+6x}{(2x+1)^2} = \frac{-9}{(2x+1)^2}$

donc $f'(a) = -1 \Leftrightarrow \frac{-9}{(2a+1)^2} = -1 \Leftrightarrow (2a+1)^2 = 9 \Leftrightarrow 2a+1 = 9$ ou -9
$\Leftrightarrow 2a = 8$ ou $2a = -10$
$\Leftrightarrow a = 4$ ou $a = -5$

$$\boxed{\mathcal{S} = \{-5; 4\}}$$

EXO 10

- $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2-4) = 3(x+2)(x-2)$ pour $x \in \mathbb{R}$

négatif entre ses racines et positif ailleurs

$f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x^3$ (pour les limites)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	16	↘	-16	↗	$+\infty$

$$\begin{cases} f(2) = -16 \\ f(-2) = 16 \end{cases}$$

NOTONS QUE f EST IMPAIRE

- $g(x) = x^{3/2}$ pour $x \in [0, +\infty[$ et $g'(x) = 3/2\sqrt{x} > 0$ pour $x \in]0, +\infty[$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	↗	$+\infty$

g est une BIJECTION strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$

$\frac{2x}{x^2+2}$ $\quad$ $\frac{2\sqrt{2}}{4}$

- $h'(x) = \dfrac{2\times(x^2+2) - 2x\times 2x}{(x^2+2)^2} = \dfrac{4-2x^2}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2} = \dfrac{2(\sqrt{2}-x)(\sqrt{2}+x)}{(x^2+2)^2}$

positif entre ses racines et négatif en-dehors

pour $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	↘	$-\sqrt{2}/2$	↗	$\sqrt{2}/2$	↘	0

$h(x) \underset{\infty}{\sim} \frac{2}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

$h(1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $h(-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

NOTONS QUE h EST IMPAIRE

N.B. les tableaux de variations permettent de détecter après coup des parités ou symétries qui auraient pu nous échapper

• $j(x)=\frac{3x-1}{2x+1}$ pour $x\neq -1/2$ et $j'(x)=\frac{3(2x+1)-2(3x-1)}{(2x+1)^2}=\frac{5}{(2x+1)^2}>0$ pour $x\neq -1/2$

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$j'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$j(x)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$3/2$

• $j(x)\underset{\infty}{\sim}\frac{3}{2}$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1/2}(3x-1)=-5/2<0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to -1/2\\ x>-1/2}}(2x+1)=0^+ \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to -1/2\\ x<-1/2}}(2x+1)=0^- \end{cases}$$

Ne pas oublier la valeur interdite !

• $k(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$ pour $x\neq 1$ et $k'(x)=\frac{2x(x-1)-(x^2-2)\times 1}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x^2+2}{(x-1)^2}$

$$=\frac{x^2-2x+2}{(x-1)^2} \quad \text{pour } x\neq 1$$

Or x^2-2x+2 a pour discriminant $\Delta=4-4\times 2=-4<0$ donc ce trinôme n'a pas de racines et reste toujours strictement positif. Ainsi $k'(x)>0$ pour tout $x\neq 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \;\Vert\; -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$k(x)\underset{\infty}{\sim} x$ (pour les limites en $+\infty$ et en $-\infty$)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1}(x^2-2)=-1 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(x-1)=0^- \text{ et } \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}(x-1)=0^+ \end{cases}$$

On obtient un tableau de variations semblable au précédent.
Une fois de plus, attention à ne pas oublier la valeur interdite : la dérivée est strictement positive sur l'ensemble de définition, mais celui-ci est la réunion de deux intervalles.

- $\ell'(x) = 6x^2+6x-12 = 6(x^2+x-2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
  x^2+x-2 ont pour racines évidentes 1 et -2 (cf. produit $= -2$)
  donc $\ell'(x) = 6(x-1)(x+2)$... négatif entre ses racines et positif en dehors

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$\ell'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\ell(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	27	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- $\ell(x) \underset{\infty}{\sim} 2x^3$ (pour les limites)

$\begin{cases} \ell(1) = 0 \\ \ell(-2) = 27 \end{cases}$

EXO 12

On étudie les variations des fonctions proposées pour déterminer leurs maximums et minimums sur les intervalles proposés

1) $f'(x) = 10x-3$ pour tout $x \in [0,4]$

$f(0) = -2 \quad f(4) = 66$

$f\left(\frac{3}{10}\right) = \frac{45}{100} - \frac{9}{10} - 2 = \frac{45-90-200}{100}$

$= \frac{-245}{100} = -2{,}45$

x	0		$3/10$		4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-2{,}45$	$\nearrow$	66

On déduit du tableau de variations que $\boxed{-2{,}45 \leq f(x) \leq 66}$ pour tout $x \in [0;4]$

2) $g'(x) = -4x+4 = 4(1-x)$ sur $[-3;5]$

$g(-3) = -18-12+3 = -27 \quad g(1) = 5$

$g(5) = -50+20+3 = -27$

x	-3		1		5
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-27	$\nearrow$	5	$\searrow$	-27

On en déduit que $\boxed{-27 \leq g(x) \leq 5}$ pour tout $x \in [-3;5]$

3) $h'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1)$ pour tout $x \in]-2;2]$

$2x^2 - x - 1$ admet pour racine évidente 1

La seconde racine est $-1/2$ (cf. produit $= -1/2$)

Ainsi $2x^2 - x - 1 = 2(x-1)(x+\frac{1}{2})$ ... négatif entre ses racines et positif ailleurs.

x	-2		$-1/2$		1		2
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	-32	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

$h(2) = 8$ $\quad h(-2) = -32$

$h(1) = -5$

$h(-1/2) = -4/8 - 3/4 + 6/2$

$= -2/4 - 3/4 + 12/4 = 7/4$

On en déduit que $\boxed{-32 < h(x) \leq 2}$ pour tout $x \in]-2;2]$

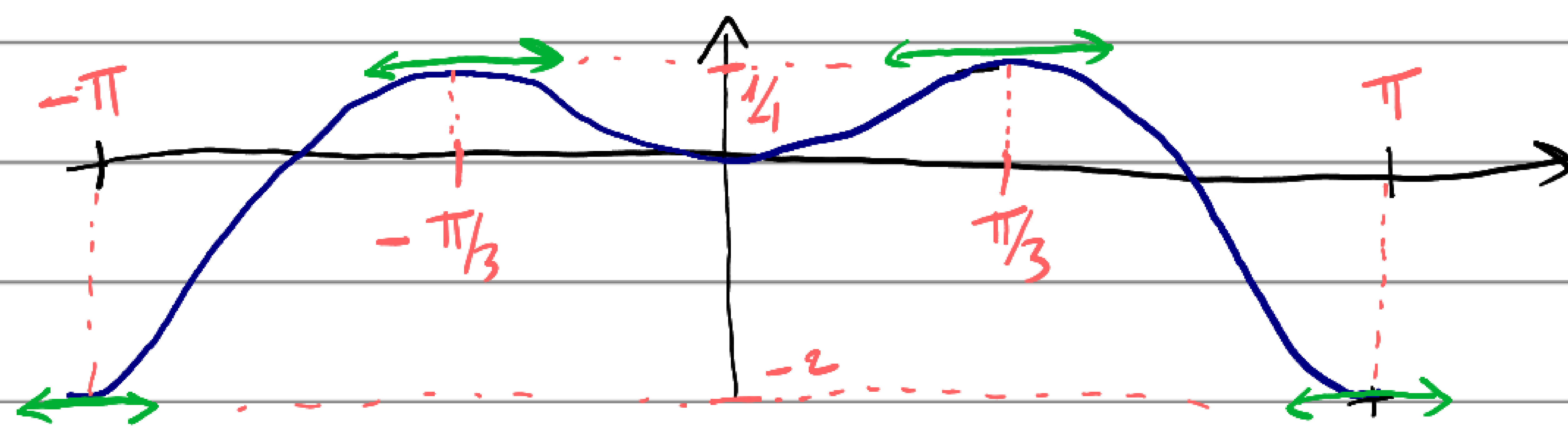
EXO 11

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ (produit et somme de fonctions usuelles)
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) - \cos^4(x+2\pi) = \cos(x) - \cos^4(x) = f(x)$
  donc f est 2π-périodique $\Rightarrow$ on peut restreindre son étude à $[-\pi,\pi] = I$
- L'intervalle I est symétrique par rapport à 0 et pour tout $x \in I$, on a
  $f(-x) = \cos(-x) - \cos^4(-x) = \cos(x) - \cos^4(x) = f(x)$ donc f est paire $\Rightarrow$ on peut restreindre
  son étude à $[0,\pi]$
- Pour $x \in I$, $f'(x) = -\sin(x) + 2\sin(x)\cos(x = (2\cos(x) - 1)\sin(x)$
  Etudions son signe sur $[0,\pi]$ (elle est impaire cf expression ci-dessus)
  * $\sin(x) \geq 0$ sur $[0,\pi]$ donc $f'(x)$ est du signe de $2\cos(x) - 1$
  * $2\cos(x) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos(x) \geq \frac{1}{2} = \cos(\pi/3) \Leftrightarrow x \in [0,\pi/3]$ car $\cos \downarrow$ sur $[0,\pi]$

De ce fait, $f'(x) \geq 0$ sur $[0,\pi/3]$ et $f'(x) \leq 0$ sur $[\pi/3,\pi]$

Comme f' est impaire, on en déduit son signe sur $[-\pi,0]$ par symétrie

x	$-\pi$		$-\pi/3$		0		$\pi/3$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-2	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/4$	$\searrow$	-2



EXO 13

1) Notons $f_1 : x \mapsto x - \sin(x)$ sur $[0,+\infty[$

On a $f_1'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$ donc f_1 est $\nearrow$

Comme $f_1(0) = 0$, alors $f_1(x) \geqslant 0$ soit $\boxed{x \geqslant \sin(x) \text{ pour tout } x \in [0,+\infty[}$

Notons $f_2 : x \mapsto \cos(x) - 1 + x^2/2$ sur $[0,+\infty[$

On a $f_2'(x) = -\sin(x) + x = f_1(x) \geqslant 0$ donc f_2 est $\nearrow$

Comme $f_2(0) = 0$, alors $f_2(x) \geqslant 0$ soit $\boxed{\cos(x) \geqslant 1 - x^2/2 \text{ pour tout } x \geqslant 0}$

Notons $f_3 : x \mapsto \sin(x) - x + x^3/6$ sur $[0,+\infty[$

On a $f_3'(x) = \cos(x) - 1 + x^2/2 = f_2(x) \geqslant 0$ donc f_3 est $\nearrow$

Comme $f_3(0) = 0$, alors $f_3(x) \geqslant 0$ soit $\boxed{\sin(x) \geqslant x - x^3/6 \text{ pour tout } x \geqslant 0}$

Notons $f_4 : x \mapsto 1 - x^2/2 + x^4/24 - \cos(x)$ sur $[0,+\infty[$

On a $f_4'(x) = -x + x^3/6 + \sin(x) = f_3(x) \geqslant 0$ donc f_4 est $\nearrow$

Comme $f_4(0) = 0$, alors $f_4(x) \geqslant 0$ soit $\boxed{1 - x^2/2 + x^4/24 \geqslant \cos(x) \text{ pour } x \geqslant 0}$

Les encadrements en découlent alors.

2) Pour tout $x>0$, on a $-x^3/6 \leq \sin(x)-x \leq 0$ d'où $0 \leq \dfrac{x-\sin(x)}{x^2} \leq x/6$

On déduit du Thme des Gendarmes que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-\sin(x)}{x^2}=0$

Par imparité, on obtient $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-\sin(x)}{x^2}=0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin(x)}{x^2}=0}$

Pour tout $x>0$, $-\dfrac{x^2}{2} \leq \cos(x)-1 \leq -\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}$ d'où $\dfrac{1}{2}-\dfrac{x^2}{24} \leq \dfrac{1-\cos(x)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

Gendarmes : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ Parité : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}}$

N.B $f : x \mapsto \dfrac{x-\sin(x)}{x^2}$ impaire car $\mathcal{D}f=\mathbb{R}$ et $f(-x)=\dfrac{-x+\sin(x)}{x^2}=-f(x)$

$g : x \mapsto \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ paire car $\mathcal{D}f=\mathbb{R}$ et $g(-x)=\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}=g(x)$

EXO 14

1) Soit $f : x \mapsto e^x-1-x$ sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable car 

et $f'(x)=e^x-1=e^x-e^0$ est du signe de x (exp ↗)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	0	↗	

$f(0)=1-1-0=0$

On déduit du tableau que $f(x) \geq 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

d'où $\boxed{e^x \geq x+1 \text{ pour tout } x\in\mathbb{R}}$

2) Posons $f : x \mapsto x-\ln(1+x)$ et $g : x \mapsto \ln(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ sur $[0;+\infty[$

Ces deux fonctions sont dérivables car 

Étudions leurs variations

- $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{1+x-1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geqslant 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$f(0) = 0 - \ln 1 = 0$

- $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1 - 1 - x + x + x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

$g(0) = \ln 1 - 0 + 0 = 0$

On déduit de ces deux tableaux de variations que $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$, si bien que $\boxed{x - x^2/2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x \text{ pour tout } x \geqslant 0}$

3) Posons $f : x \longmapsto x - \sin(x)$ et $g : x \longmapsto \sin(x) - \frac{2x}{\pi}$ sur $[0, \pi/2]$

Ces deux fonctions sont dérivables car 

Étudions leurs variations sur $[0, \pi/2]$

- $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$

car $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$

x	0		$\pi/2$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	

$f(0) = 0 - \sin(0) = 0$

donc $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$

- $g'(x) = \cos(x) - 2/\pi = \cos(x) - \cos(\theta)$

avec $\theta = \arccos(2/\pi) \in [0, \pi/2]$

donc $g'(x)$ est du signe de $\theta - x$ $(\cos \downarrow)$

x	0		θ		$\pi/2$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$g(0) = \sin 0 - 0 = 0$ $\quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} - 1 = 0$

donc $g(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0, \pi/2]$

On en déduit que $\boxed{\frac{2x}{\pi} \leqslant \sin(x) \leqslant x \text{ pour } x \in [0, \pi/2]}$

EXO 15

1) $(B_0) \Leftrightarrow \forall t \geq 0,\ 1 \geq 1$: c'est vrai

$(B_1) \Leftrightarrow \forall t \geq 0,\ 1+t \geq 1+t$: c'est encore vrai !

Jusque là, tout va bien

2) (a) $\varphi'(x) = n(1+x)^{n-1} - n$ et $\varphi''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ pour tout $x \geq 0$

(b) Pour $x \geq 0$ on a $\varphi''(x) > 0$ donc φ' est strictement croissante

Ainsi $\varphi'(0) = n - n = 0$ est le minimum de φ' sur $[0,+\infty[$

si bien que $\varphi'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$

(c) Il en découle que φ est croissante sur $[0,+\infty[$

Son minimum est alors $\varphi(0) = 1 - 1 - 0 = 0$, si bien que $\varphi(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$

Autrement dit, (B_n) est vraie

EXO 16

1) $\boxed{f : x \mapsto x^2}$

- La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $a \in \mathbb{R}$ a pour équation
$y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2$ soit $y = 2ax - a^2$
- Considérons alors $d : x \mapsto x^2 - (2ax - a^2) = x^2 - 2ax + a^2$
On a $d(x) = (x-a)^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a
- Ceci étant vrai pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, il en découle que $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de toutes ses tangentes

$\boxed{g : x \mapsto \exp(x)}$ Dans la suite, on note (T_a) la tangente au point d'abscisse a

- $(T_a) : y = g'(a)(x-a) + g(a) = e^a(x-a) + e^a = e^a x + e^a(1-a)$
- Posons $d : x \mapsto e^x - e^a x - e^a(1-a)$

On a $d'(x) = e^x - e^a$ qui est du signe de $x-a$ par croissance de exp

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$d'(x)$	$-$	0	$+$
$d(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$d(a) = e^a - e^a = 0$ est le minimum de d

donc $d(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Ainsi, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la courbe $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de sa tangente (T_a)

2)

$\boxed{h : x \longmapsto \sqrt{x} \text{ sur } [0, +\infty[}$

- Pour $a > 0$, $(T_a) : y = h'(a)(x-a) + h(a) = \dfrac{x-a}{2\sqrt{a}} + \sqrt{a} = \dfrac{x+a}{2\sqrt{a}}$
- Posons $d : x \longmapsto \sqrt{x} - \dfrac{x+a}{2\sqrt{a}}$ sur $[0, +\infty[$

On a $d'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{2\sqrt{a}\sqrt{x}}$ pour tout $x > 0$, qui est du signe de $(a-x)$ par croissance de la fonction racine carrée

x	0	a	$+\infty$
$d'(x)$	$+$	0	$-$
$d(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$

$d(a) = \sqrt{a} - \dfrac{2a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - \sqrt{a} = 0$

donc $d(x) \leqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$

Ainsi, pour tout $a > 0$, la courbe $\mathcal{C}_h$ est situé en-dessous de sa tangente (T_a)

$\boxed{\ln \text{ sur }]0, +\infty[}$

- Pour $a > 0$ $(T_a) : y = \dfrac{x-a}{a} + \ln(a) = \dfrac{x}{a} + \ln(a) - 1$
- Posons $d : x \longmapsto \ln(x) - \dfrac{x}{a} - \ln(a) + 1$ sur $]0, +\infty[$

On a $d'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-x}{ax}$ qui est du signe de $a-x$ car $ax > 0$

x	0	a	$+\infty$
$d'(x)$	$+$	0	$-$
$d(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

$d(a) = \ln(a) - 1 - \ln(a) + 1 = 0$

donc $d(x) \leqslant 0$ pour tout $x > 0$

Ainsi, pour tout $a > 0$, la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ est située en dessous de sa tangente (T_a)

EXO 17

- f dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{6x}{16} = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3x}{8}$ pour $x>0$

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 4 est donc

$$(T) : y = f'(4)(x-4) + f(4) = \left(3 - \frac{3}{2}\right)(x-4) + (8-3) = \frac{3}{2}x - 6 + 5 = \frac{3x}{2} - 1$$

- Posons $d : x \mapsto x\sqrt{x} - \frac{3x^2}{16} - \frac{3x}{2} + 1$ sur $[0,+\infty[$

On a $d'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{2} - \frac{3x}{8} - \frac{3}{2} = \frac{12\sqrt{x} - 3x - 12}{8} = \frac{-3}{8}\left(x - 4\sqrt{x} + 4\right)$ pour $x>0$

Or $x = (\sqrt{x})^2$

d'où $x - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 4 = (\sqrt{x}-2)^2 \geqslant 0$

si bien que $d'(x) \leqslant 0$ pour tout $x>0$:

d est décroissante sur $[0,+\infty[$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$d'(x)$		$-$		$-$	
$d(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

- Enfin $d(4) = 0$ (cf. les courbes se coupant pour $x=4$)

si bien que $d(x)$ est positif sur $]-\infty,4]$ et négatif sur $[4,+\infty[$

AINSI $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de (T) sur $]-\infty;4]$ et au-dessous sur $[4,+\infty[$

EXO 18

Il y en a trop, je m'avoue vaincu !

EXO 19 : les allures des courbes sont données à la fin

EXO 19

(a) $f : x \mapsto e^{\frac{-x}{x^2+1}}$ définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

- $\frac{-x}{x^2+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \exp(0) = 1}$ par composition de limites

- $u : x \mapsto \frac{-x}{x^2+1}$ a pour dérivée $u' : x \mapsto \frac{-1\times(x^2+1) - (-x)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$

Or x^2-1 s'annule en -1 et 1, est >0 en dehors de ses racines

et <0 à l'intérieur de ses racines

Enfin $f = e^u$ a pour dérivée $f' = u'e^u$, du signe de u donc de x^2-1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$\sqrt{e}$	$\searrow$	$1/\sqrt{e}$	$\nearrow$	1

$f(1) = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$
$f(-1) = e^{1/2} = \sqrt{e}$

- La courbe $\mathcal{C}_f$ admet Δ pour asymptote en $+\infty$ et $-\infty$, avec $\Delta : y = 1$
Elle possède deux tangentes horizontales en $(-1, \sqrt{e})$ et en $(1, 1/\sqrt{e})$

(b) $g : x \mapsto e^{-x} + \dfrac{1-x}{x+1}$ définie lorsque $x+1 \neq 0$, donc sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- $\dfrac{1-x}{1+x} \underset{\infty}{\sim} -1$; comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ (composition) alors $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1}$ (somme)

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty}$

- $\lim\limits_{x \to -1} 1-x = 2 > 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1+x) = 0^+$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} g(x) = +\infty}$ (quotient et somme)

$\lim\limits_{x \to -1} e^{-x} = e$

de même $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x+1) = 0^-$ donc $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} g(x) = -\infty}$

- $(e^{-x})' = -e^{-x} < 0$ et $\left(\dfrac{1-x}{x+1}\right)' = \dfrac{-1 \times (x+1) - (1-x) \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0$

donc $g'(x) = -e^{-x} - \dfrac{2}{(x+1)^2} < 0$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	-1

La courbe $\mathcal{C}_g$ admet $\Delta_1 : x = -1$ pour asymptote et $\Delta_2 : y = -1$ pour asymptote en $+\infty$
(En $-\infty$, elle admet $\mathcal{C} : y = e^{-x} - 1$ pour asymptote car $g(x) - (e^{-x} - 1) \to 0$)

(c) . La fonction h est définie sur $[1;+\infty[$ et $h(x)=(x-1)^{5/2}$ pour $x>1$

. $h(1)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=+\infty$ par produit et composition

. h est dérivable sur $]1,+\infty[$ et $h'(x)=\frac{5}{2}(x-1)^{3/2}>0$

x	1		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	
$h(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Superbe bijection de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$

Pas grand chose à signaler sinon : $h'(1)=0$

car $\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=\frac{(x-1)^{5/2}}{x-1}=(x-1)^{3/2}\xrightarrow[x\to1]{}0$

donc $\mathcal{C}_h$ admet une tangente horizontale en 1

On retrouve le comportement typique d'une fonction puissance d'exposant >1

(d) . $1+x^2>0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$

De plus, $f(-x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc f est une fonction paire

. $\lim\limits_{x\to\infty}1+x^2=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ par somme et composition

COURBE SYMÉTRIQUE PAR RAPPORT À (Oy)

. Pour $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ est du signe de x

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(0)=\ln(1)=0$

$f'(0)=0$ donc $\mathcal{C}_f$ admet (Ox) pour tangente en 0

En $+\infty$, pas de droite asymptote. Par contre, $f(x)-2\ln(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2)$

$=\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$

donc la courbe $\mathcal{C}: y=2\ln(x)$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$

(e) • $k : x \mapsto x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ est définie lorsque $x+1 \neq 0$ et $\frac{x}{x+1} > 0$ (cf. ln)

Ainsi $\boxed{\mathcal{D}_k =]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[}$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x}{x+1}$		$+$		$-$	0	$+$	

• $\frac{x}{x+1} \underset{\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln 1 = 0$ par continuité de ln

On en déduit par somme de limites que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} k(x) = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} k(x) = -\infty}$

On en déduit aussi que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [k(x)-(x-4)] = 0$: ainsi, la droite $\Delta_1 : y = x-4$ est asymptote à la courbe de k en $-\infty$ et en $+\infty$

• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to 0} x+1 = 1$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \frac{x}{x+1} = 0^+$ puis $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -\infty$ (quotient et composée)

On en déduit par somme de limites que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\>}} k(x) = -\infty}$ | AINSI $\Delta_2 : x = 0$ EST ASYMPTOTE

• $\lim\limits_{x\to -1} x = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}} x+1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}} \frac{x}{x+1} = +\infty$ et $\lim \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = +\infty$ (quotient et composée)

On en déduit par somme de limites que $\boxed{\lim\limits_{\substack{x\to -1\\x<-1}} k(x) = +\infty}$ | AINSI $\Delta_3 : x = -1$ EST ASYMPTOTE

• k est dérivable sur $\mathcal{D}_k$ car  et $k(x) = x-4-\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x-4-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

d'où $k'(x) = 1 - \frac{-1/x^2}{1+1/x} = 1 + \frac{1}{x^2+x} = 1 + \frac{1}{x(x+1)} > 0$ pour $x \in \mathcal{D}_k$

($x(x+1) > 0$, comme $\frac{x}{x+1}$)

⚠ NE PAS ÉCRIRE $\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \ln(x) - \ln(x+1)$ CAR C'EST FAUX SUR $]-\infty;-1[$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	||	//////	||	$+$	
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ||	//////	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

ON PEUT VOIR S'IL Y A UNE SYMÉTRIE EN $x = -1/2$ (C'EST LE CAS !)

f) $\ell : x \mapsto x - \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$

* $\sin(x) \underset{x\to\infty}{=} o(x)$ donc $\ell(x) \underset{x\to\infty}{\sim} x$ et $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ell(x) = +\infty}$ $\boxed{\lim_{x\to-\infty} \ell(x) = -\infty}$

N.B $\ell(x) \sim x$ mais $\ell(x) - x$ n'a pas de limite en ∞ $\Rightarrow$ pas d'asymptote

* ℓ dérivable sur $\mathbb{R}$ car ☺ et $\ell'(x) = 1 - \cos(x) \geq 0$ car $\cos(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

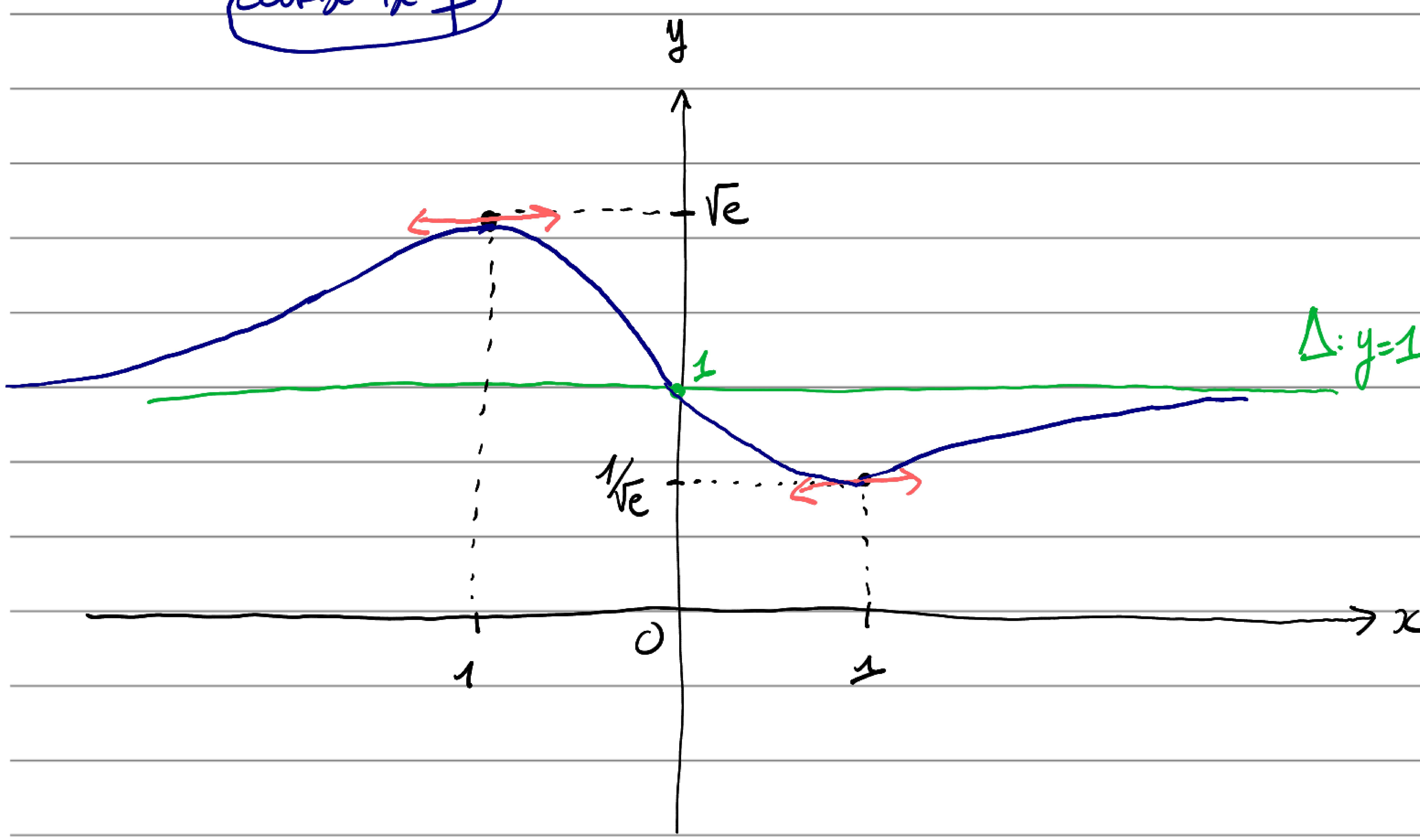
Notons que $\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi$: multitude de tangentes horizontales !

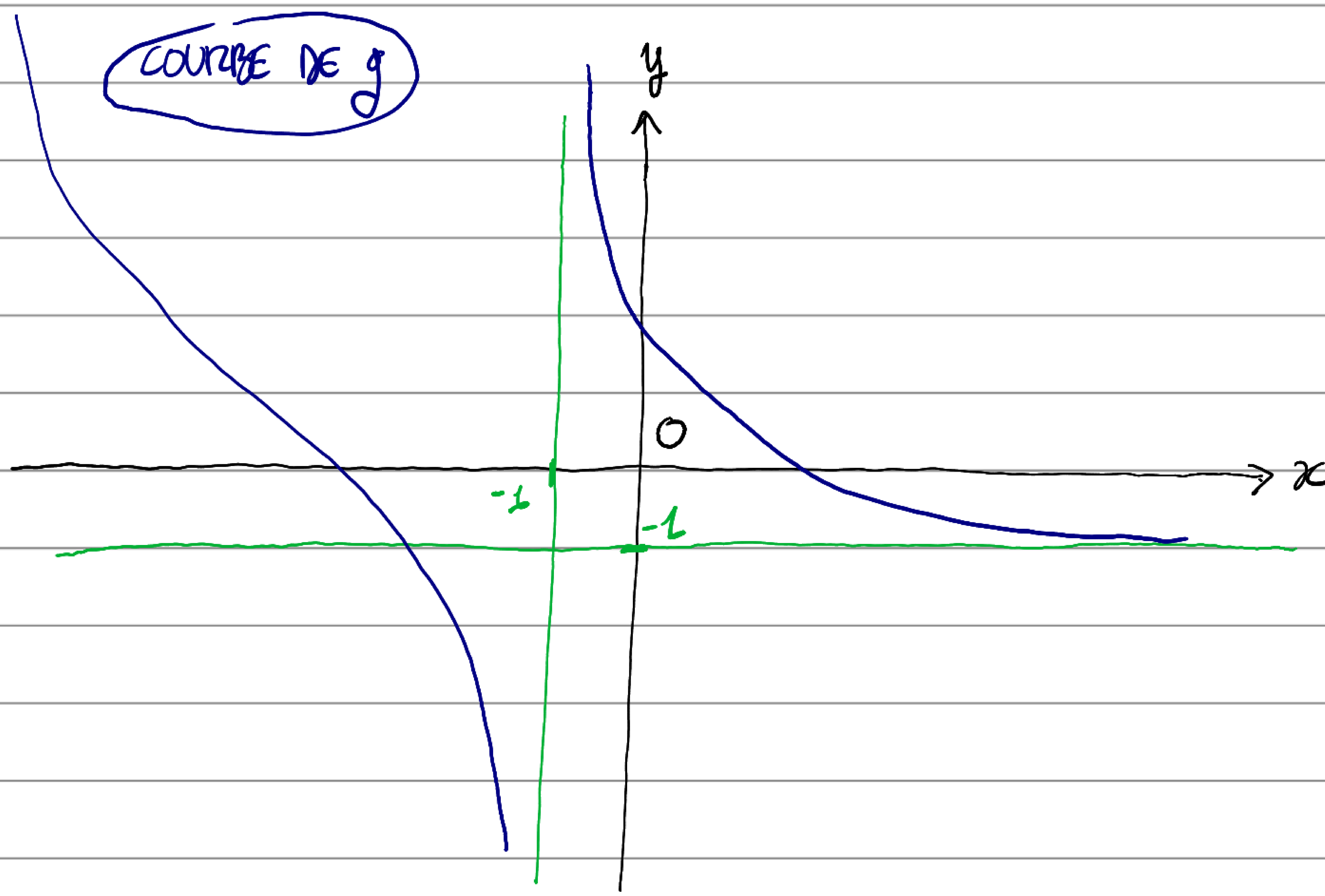
* $\ell(-x) = -x + \sin x = -\ell(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

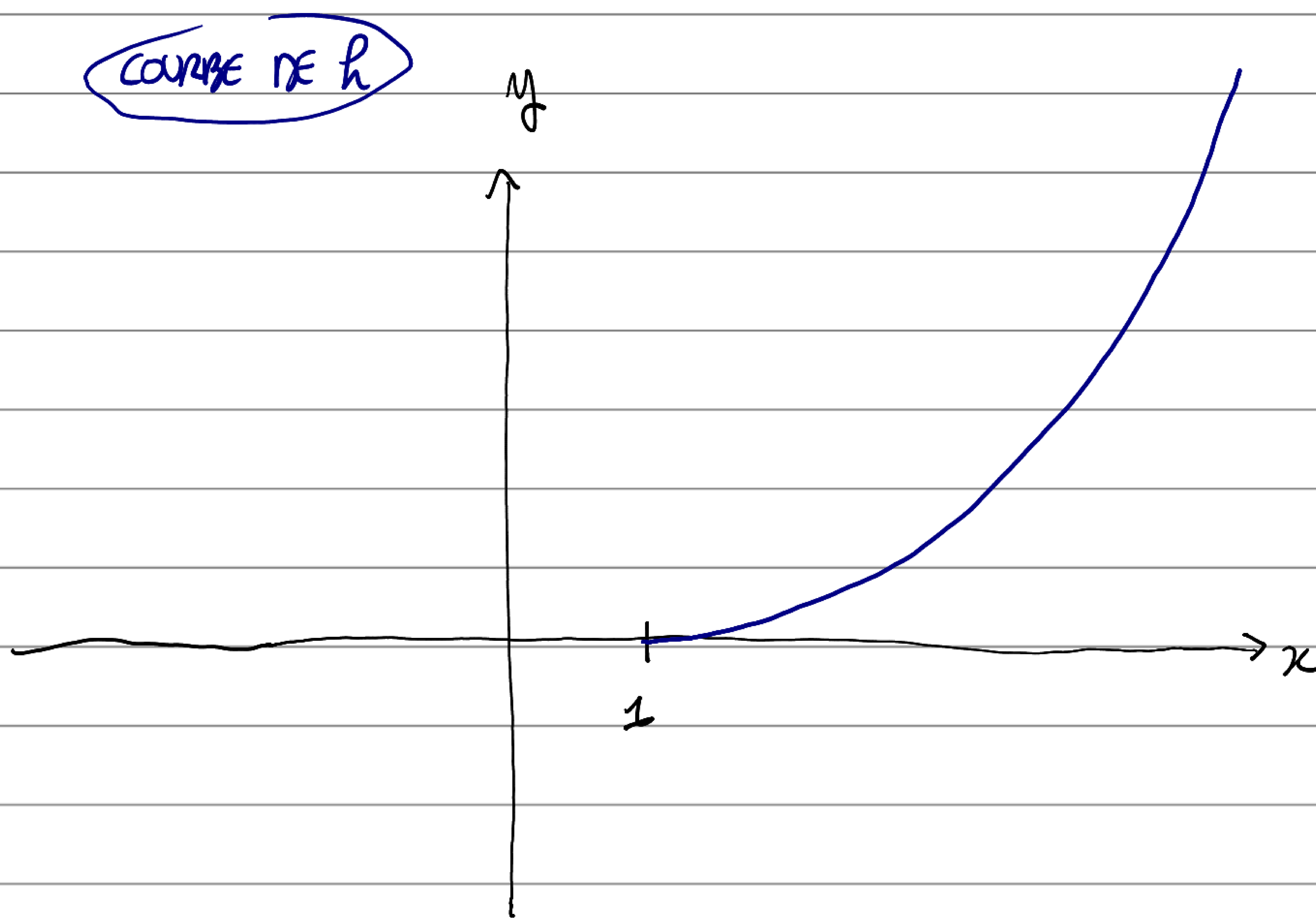
donc ℓ est impaire et sa courbe est symétrique par rapport à $O(0,0)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\ell'(x)$		$+$	0	$+$	
$\ell(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

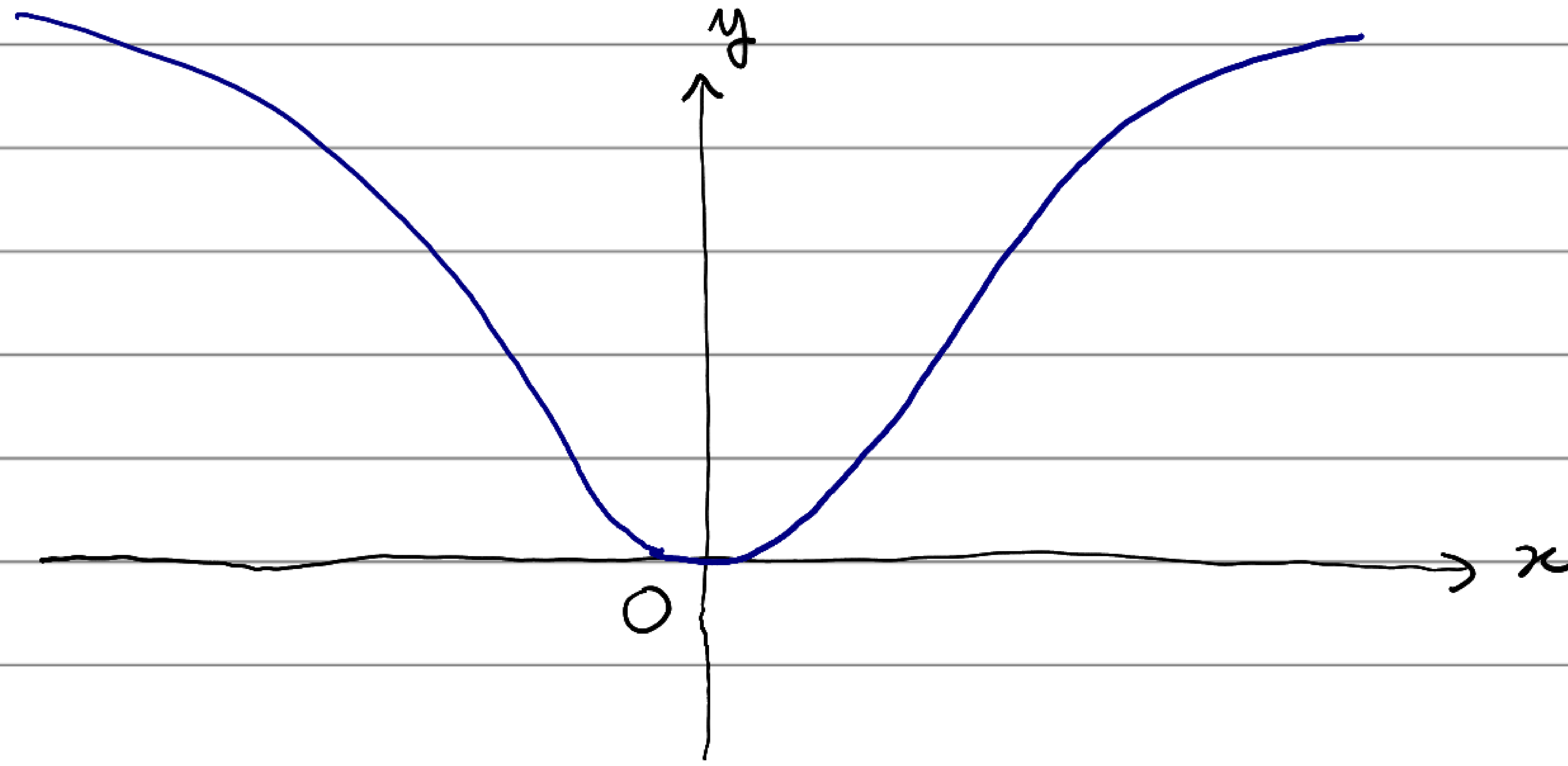
COURBE DE f



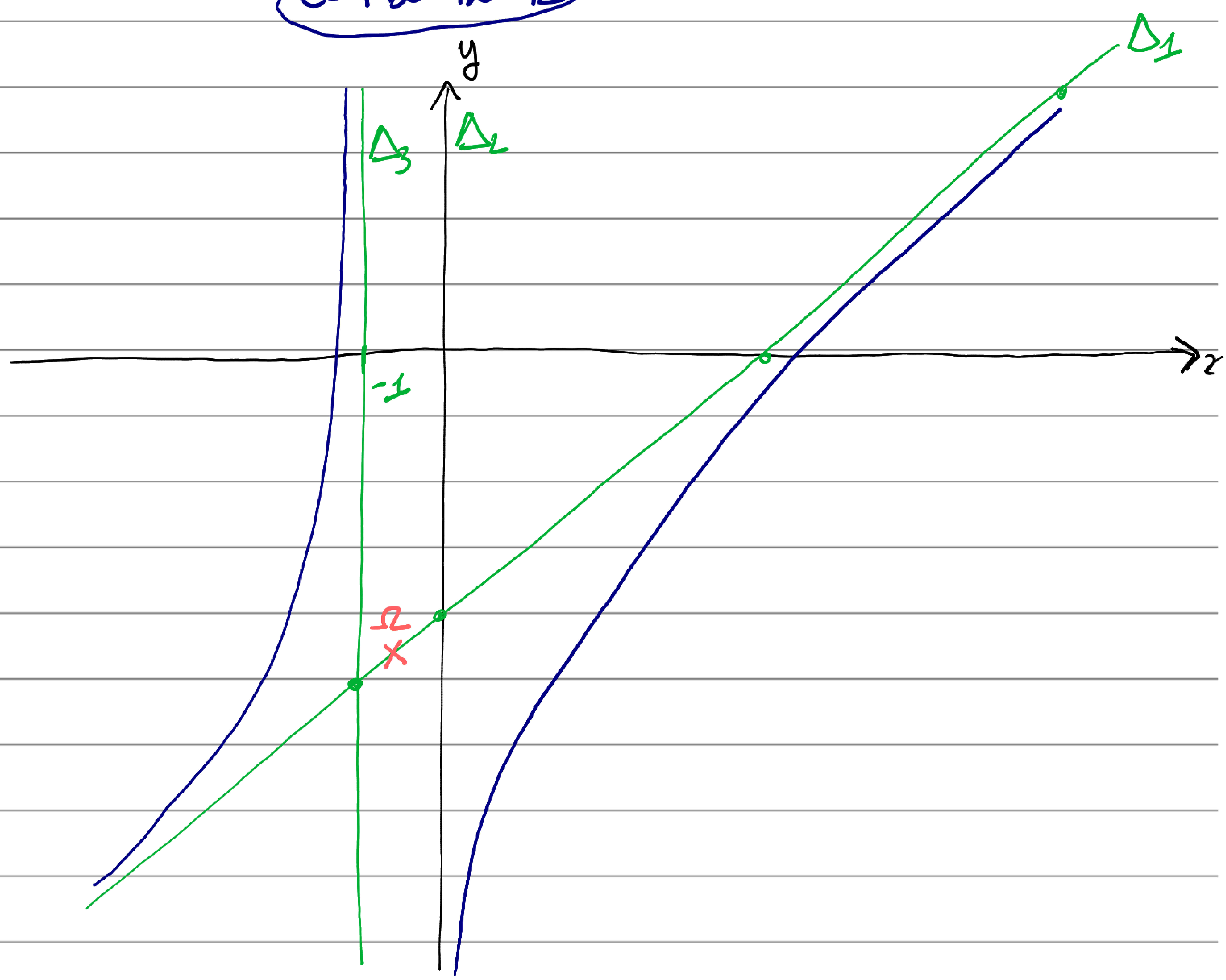

COURBE DE g
y
O
x
-1
-1

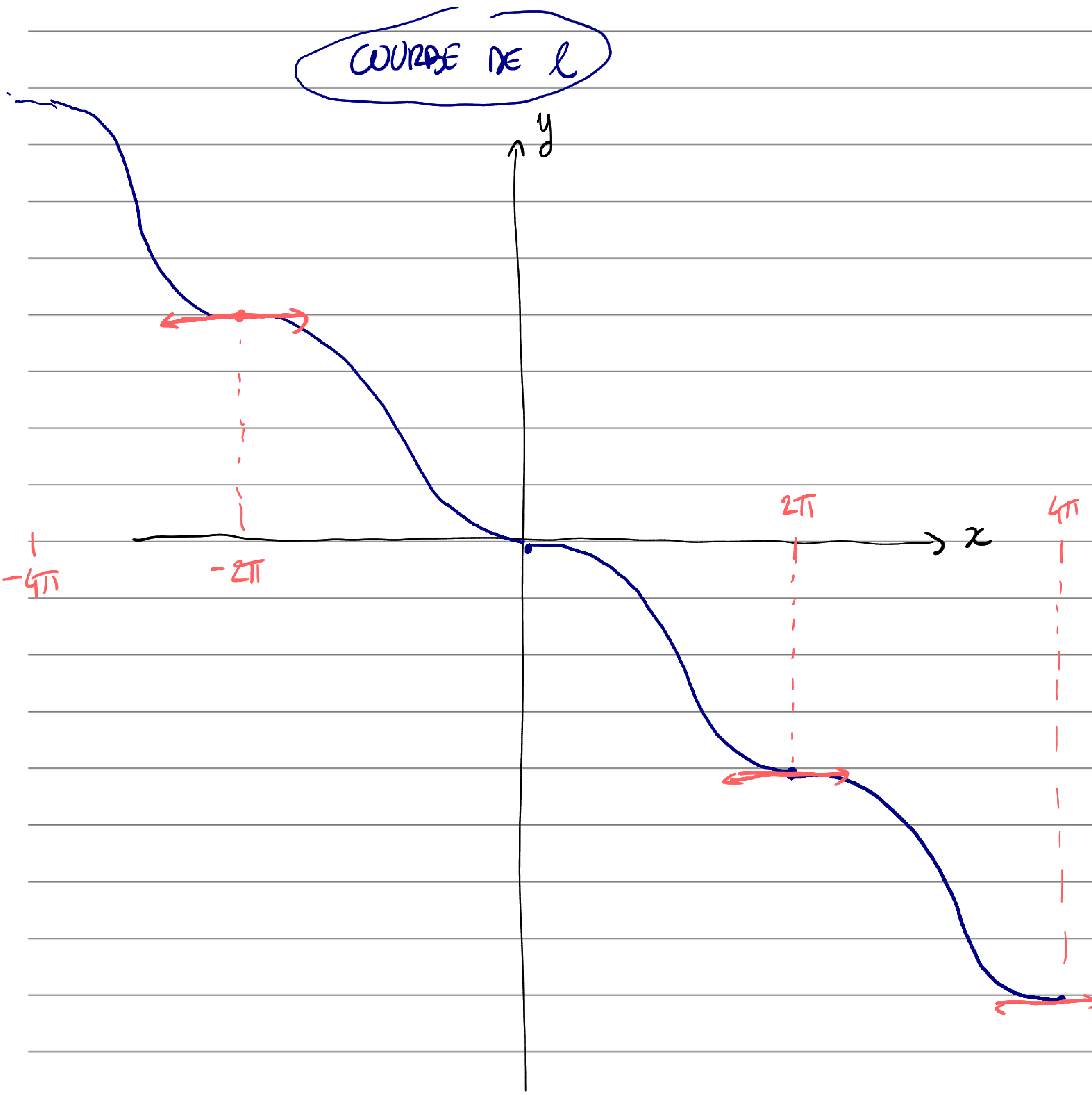

COURBE DE h
y
x
1

COURBE DE f



COURBE DE h





COURBE DE ℓ
y
x
-4π
-2π
2π
4π