

CHAPITRE 9

EXO 1

On y va à grand coup de Charles, les fonctions étant constantes sur chaque intervalle

$$\bullet \int_I f = 2 \times (-1) + 3 \times 2 + 2 \times (-3) + 2 \times 1 = \boxed{0} \quad \bullet \int_I f^2 = 2 \times 1 + 3 \times 4 + 2 \times 9 + 2 \times 1 = \boxed{34}$$

$$\bullet \int_I g = 1 \times 1 + 3 \times (-2) + 4 \times 3 + 1 \times (-1) = \boxed{6} \quad \bullet \int_I f \cdot g = \int_I f + \int_I g = 6$$

$$\bullet fg = -1 \text{ sur } [0;1[\quad // \quad 2 \text{ sur } [1;2[\quad // \quad -4 \text{ sur } [2;4[\quad // \quad 6 \text{ sur } [4;5[\\ -9 \text{ sur } [5;7[\quad // \quad 3 \text{ sur } [7;8[\quad // \quad -1 \text{ sur } [8;9[$$

donc $\int_I fg = 1 \times (-1) + 1 \times 2 + 2 \times (-4) + 1 \times 6 + 2 \times (-9) + 1 \times 3 + 1 \times (-1) = \boxed{-17}$

EXO 2

(a) $-x^2 \leq 0$ sur $[0;2]$ donc $\int_0^2 -x^2 dx \leq 0$

(b) $\ln(t) \leq 0$ sur $[0,5;1]$ donc $\int_{0,5}^1 \ln(t) dt \leq 0$ et $\int_1^{0,5} \ln(t) dt \geq 0$

(c) $e^{-u^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$ donc $\int_5^{23} e^{-u^2} du > 0$

(d) $\sin(\tau) > 0$ et $\cos(\tau) > 0$ donc $\tan(\tau) > 0$ d'où $\int_{\pi}^{4\pi/3} \tan(\tau) d\tau > 0$

EXO 3

(a) Pour $x \in [1;2]$ $x^2 e^x - x e^x = x(x-1)e^x \geq 0$ donc $x e^x \leq x^2 e^x$ et $\int_1^2 x e^x dx \leq \int_1^2 x^2 e^x dx$

(b) Pour $t \in [0;1]$ $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t^2} = \frac{1+t^2 - (1+t)}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{t(t-1)}{(1+t)(1+t^2)} \leq 0$ donc $\frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $\int_0^1 \frac{dt}{1+t} \leq \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$

(c) Pour $u \in [0; \pi/4]$ $\sin(u) \leq \cos(u)$ d'après trigo donc $\int_0^{\pi/4} \sin(u) du \leq \int_0^{\pi/4} \cos(u) du$

EXO 4

$$1) \forall k \in \mathbb{Z} \quad \forall x \in [a, b] \quad (f(x) + kg(x))^2 \geq 0 \quad \text{d'où} \quad P(t) = \int_a^b (f(x) + tg(x))^2 dx \geq 0$$

$$2) \forall k \in \mathbb{Z} \quad P(t) = \int_a^b (f(x)^2 + 2t f(x)g(x) + t^2 g(x)^2) dx = \int_a^b f(x)^2 dx + 2t \int_a^b f(x)g(x) dx + t^2 \int_a^b g(x)^2 dx$$

AINSI P est un polynôme du 2nd degré (dont les coefficients sont des intégrales!)
Comme $P(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, son discriminant est négatif ou nul, soit

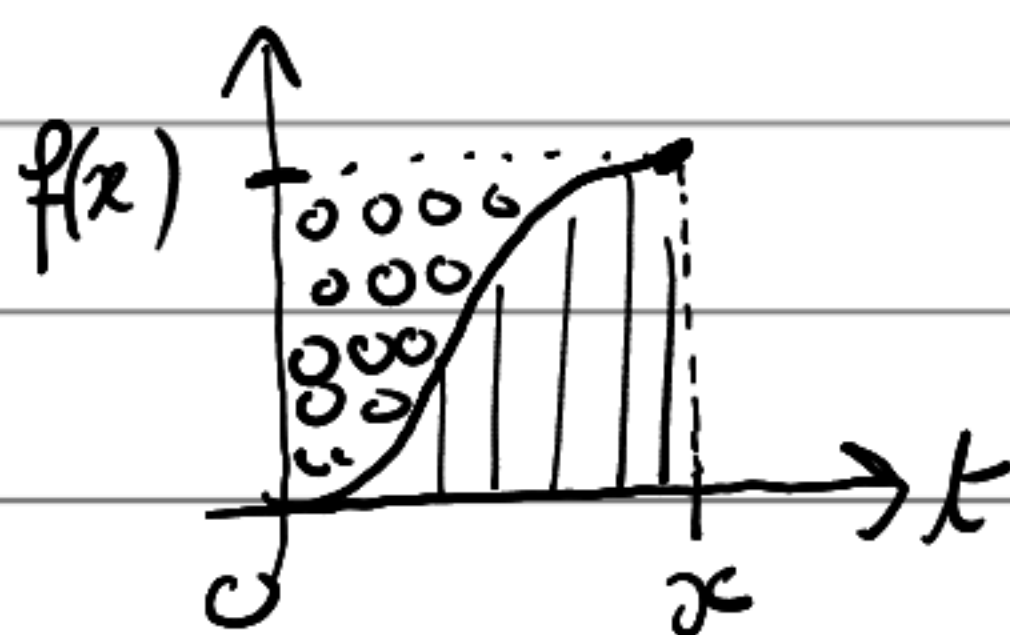
$$4 \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - 4 \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx \leq 0$$

$$\text{d'où} \quad \left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx$$

EXO 5

Soit $x > 0$

$$\int_0^x f(t) dt \text{ est l'aire hachurée } \text{||||}$$



$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt : \text{aire comprise entre la courbe de } f^{-1} \text{ et l'axe } (Ox) \text{ au-dessus de l'intervalle } [0, f(x)]$$

Cela correspond aux points $M(x, y)$ dont les coordonnées vérifient

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq f(x) \\ 0 \leq y \leq f'(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq x \\ f(y) \leq x \leq f(x) \end{cases}$$

ce qui signifie que $M'(y, x)$ appartient au domaine ○○○ compris entre la courbe de f et la droite $y = f(x)$ au-dessus de l'intervalle $[0, x]$

M et M' étant symétriques par rapport à $\Delta: y = x$ et cette symétrie conservant les aires, on en déduit que $\int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt$ est l'aire hachurée ||||

Or $\text{||||} \cup \text{○○○}$ est un rectangle d'aire $xf(x)$, d'où

$$\boxed{\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt = xf(x)}$$

Dans le cas où f est dérivable, on peut procéder comme suit:
 on note F une primitive de f et G une primitive de f^{-1} sur $\mathbb{R}_+$
 et l'on considère pour $x \geq 0$ la quantité

$$d(x) = \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt - x f(x)$$

$$= F(x) - F(0) + G(f(x)) - G(0) - x f(x)$$

On observe que $d(0) = 0$ puisque $f(0) = 0$. De plus, d est trivialement dérivable et

$$\begin{aligned} d'(x) &= F'(x) + f'(x) \times G'(f(x)) - f(x) - x f'(x) \\ &= f(x) + f'(x) \times x - f(x) - x f'(x) \quad (F' = f \text{ et } G' = f^{-1}) \end{aligned}$$

$\stackrel{=0}{\text{donc la fonction } d \text{ est constante et vaut } 0}$, ce qui conduit au résultat

EXO 6

(a) CDV $\begin{cases} u = x^2 \\ du = 2x dx \end{cases}$ alors $\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \arctan(u) = \boxed{\frac{1}{2} \arctan(x^2)}$

(b) Par linéarité $\int \frac{2x+3}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{1+x^2} dx + 3 \int \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\ln(1+x^2) + 3 \arctan(x)}$

(c) Il faut toujours simplifier les quotients de polynômes à l'aide d'une division euclidienne, sinon on ne peut pas trouver de primitive

$$\begin{array}{r} x^6 - 2x^5 + x^4 \\ -(x^6 + x^4) \\ \hline -2x^5 \\ -(-2x^5 - 2x^3) \\ \hline +2x^3 \\ -(2x^3 + 2x) \\ \hline -2x \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x^2+1 \\ x^4 - 2x^3 + 2x \end{array} \right.$$

AINSI $x^6 - 2x^5 + x^4 = (x^2+1)(x^4 - 2x^3 + 2x) - 2x$

d'où $\frac{x^4(1-x)^2}{x^2+1} = x^4 - 2x^3 + 2x - \frac{2x}{x^2+1}$ ← forme u'/u

d- $\int \frac{x^4(1-x)^2}{x^2+1} dx = \boxed{\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + x^2 - \ln(x^2+1)}$ assez facilement, tout compte fait !

(d) CDV $\begin{cases} u = x^3 - 1 \\ du = 3x^2 dx \end{cases}$ ainsi $\int \frac{x^2 dx}{x^3-1} = \int \frac{du}{3u} = \frac{1}{3} \ln|u| = \boxed{\frac{1}{3} \ln|x^3-1|}$

(c) Comme $x^2-1=(x+1)(x-1)$, on cherche à mettre $\frac{1}{x^2-1}$ sous la forme $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$
 Or $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$ pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$

donc cette expression coïncide avec $\frac{1}{x^2-1}$ ssi $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a=1 \\ 2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1/2 \\ b=-1/2 \end{cases}$

AINSI on a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; +1\}$

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right|}$$

(f) Un peu délicate... et astucieuse, en débord du programme de BCPST!

$$\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} + \int \frac{dx}{x^2+2x+3}$$

Tout d'abord $\int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+3} = \ln(x^2+2x+3) \dots$ (forme u'/u)... car $x^2+2x+3 > 0$

$$\text{En effet } x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+2 > 0$$

$$\text{donc } x^2+2x+3 = 2 \left(1 + \frac{(x+1)^2}{2} \right) = 2 \left(1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \text{et } \int \frac{dx}{x^2+2x+3} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right)^2} & \text{CDV } \begin{cases} u = \frac{x+1}{\sqrt{2}} \\ du = \frac{dx}{\sqrt{2}} \end{cases} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{2} du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan(u) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \boxed{\int \frac{(x+2)dx}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)}$$

MÉTHODE À RETENIR : pour intégrer l'inverse d'un polynôme du second degré, on le met sous forme canonique $a(x+\alpha)^2+\beta$ puis on factorise et l'on effectue un changement de variable pour retrouver la dérivée de arctan

EX07

$$(a) \text{ CDV } \begin{cases} u = e^x \\ du = e^x dx \end{cases} \int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}} = \int \frac{du}{1+u^2} = \arctan(u) = \boxed{\arctan(e^x)}$$

$$(b) \text{ CDV } \begin{cases} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{cases} \int \frac{\sin(x) dx}{1+\cos^2(x)} = \int \frac{-du}{1+u^2} = -\arctan(u) = \boxed{-\arctan(\cos x)}$$

$$(c) \text{ CDV } \begin{cases} u = \tan(x) \\ du = dx/\cos^2(x) \end{cases} \int \frac{e^{\tan(x)}}{\cos^2(x)} dx = \int e^u du = e^u = \boxed{e^{\tan(x)}}$$

LE CHANGEMENT DE VARIABLE, C'EST CHOUETTE!

(d) Là, c'est moins marrant: on recherche une primitive de $f: x \mapsto (x^3 + 5x^2 - 2)e^x$ sous la forme $F: x \mapsto (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x$

$$\text{On a alors } F'(x) = (3ax^2 + 2bx + c)e^x + (ax^3 + bx^2 + cx + d)e^x \\ = (ax^3 + (3a+b)x^2 + (2b+c)x + (c+d))e^x$$

$$\text{donc pour que } F' = f, \text{ il faut que } \begin{cases} a=1 \\ 3a+b=5 \\ 2b+c=0 \\ c+d=-2 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a=1 \\ b=5-3=2 \\ c=-4 \\ d=-2+4=2 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int (x^3 + 5x^2 - 2)e^x dx = \boxed{(x^3 + 2x^2 - 4x + 2)e^x}$$

(e) Même idée: on cherche une primitive de $f: x \mapsto \cos(x)e^{2x}$ sous la forme $F: x \mapsto (a\cos(x) + b\sin(x))e^{2x}$

$$\text{On a alors } F'(x) = (-a\sin(x) + b\cos(x))e^{2x} + (2a\cos(x) + 2b\sin(x))e^{2x} \\ = (2a+b)\cos(x) + (2b-a)\sin(x)e^{2x}$$

$$\text{donc } F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b=1 \\ 2b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2b \\ 5b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2/5 \\ b=1/5 \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int \cos(x)e^{2x} dx = \boxed{\frac{2\cos(x) + \sin(x)}{5} e^{2x}}$$

(f) Idem; pour $f: x \mapsto x^2 e^{-2x}$ et $F: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-2x}$, on obtient

$$F'(x) = (2ax + b)e^{-2x} - (2ax^2 + 2bx + 2c)e^{-2x} = (-2ax^2 + (2a-2b)x + (b-2c))e^{-2x}$$

$$\text{donc } F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} -2a = 1 \\ 2a - 2b = 0 \\ b - 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{aligned} a &= -1/2 \\ b &= a = -1/2 \\ c &= b/2 = -1/4 \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \int x^2 e^{-2x} dx = \boxed{\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right) e^{-2x}}$$

On pourrait également calculer (d), (e) et (f) via des IPP... mais c'est encore plus pénible! Recherche la primitive sous une forme adéquate reste la meilleure méthode... lorsque c'est envisageable!

EX08

$$(a) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x \end{cases}$$

On déduit alors de la formule d'IPP que

$$\int_1^2 \ln(x) dx = \left[x \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 1 dx = 2 \ln 2 - 0 - (2-1) = \boxed{2 \ln 2 - 1}$$

$$(b) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = \arctan(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1/(1+x^2) \\ v(x) = x \end{cases}$$

Via la formule d'IPP, on obtient

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x dx}{1+x^2} = \boxed{x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$$

$$(c) \text{ On pose } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \sin(x) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\cos(x) \end{cases}$$

On en déduit que

$$\int x \sin(x) dx = -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = \boxed{\sin(x) - x \cos(x)}$$

(d) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v(x) = x \end{cases}$

Par conséquent, on obtient

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \left[x \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2 dx}{1+x^2} = \ln(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$$

Or $x^2 = x^2 + 1 - 1$ donc $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{1+x^2}$ et $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \left[x - \arctan(x) \right]_0^1 = 1 - \frac{\pi}{4}$

Ainsi $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \boxed{\ln(2) + \frac{\pi}{2} - 2}$

(e) On pose $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{ax} \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{a} e^{ax} \end{cases}$

Ainsi

$$\int x e^{ax} dx = \frac{x}{a} e^{ax} - \int \frac{1}{a} e^{ax} dx = \boxed{\frac{x}{a} e^{ax} - \frac{e^{ax}}{a^2}}$$

(f) On pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = x^\alpha \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = x^{\alpha+1}/(\alpha+1) \end{cases}$ pour $\alpha \neq -1$

Alors

$$\int x^\alpha \ln(x) dx = \frac{x^{\alpha+1} \ln(x)}{\alpha+1} - \int \frac{x^\alpha}{\alpha+1} dx = \boxed{\frac{x^{\alpha+1} \ln(x)}{\alpha+1} - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}}$$

(Si $\alpha = -1$) $\begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1/x \end{cases}$ et $\begin{cases} u'(x) = 1/x \\ v(x) = \ln(x) \end{cases}$

d'où

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = (\ln x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx \text{ soit } \boxed{\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} (\ln(x))^2}$$

REM dans dernier cas, il est plus simple d'effectuer un COV

$\begin{cases} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \end{cases}$ donc $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 = \frac{1}{2} (\ln x)^2$

EXU 9

Changement : $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt$

CDV / $u = t - T$
 $du = dt$ $\int_T^{a+T} f(t) dt = \int_0^a f(u+T) du = \int_0^a f(u) du$ car f T -périodique
 $= - \int_a^0 f(t) dt$

d'où $\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$

EXU 10

(a) $u = \cos(x)$
 $du = -\sin(x) dx$ $\int \sin^3(x) dx = \int -\sin^2(x) \times (-\sin(x)) dx = \int (\cos^2(x) - 1) \times (-\sin(x)) dx$
 $= \int (u^2 - 1) du = \frac{u^3}{3} - u = \boxed{\frac{1}{3} \cos^3(x) - \cos(x)}$

(b) $u = \sqrt{x}$ soit $x = u^2$
 $dx = 2u du$ $\int x e^{\sqrt{x}} dx = \int u^2 e^u \times 2u du = 2 \int u^3 e^u du$

On recherche une primitive de $f: u \mapsto u^3 e^u$ sous la forme $F: u \mapsto (au^3 + bu^2 + cu + d)e^u$
 Alors $F'(u) = (3au^2 + 2bu + c)e^u + (au^3 + bu^2 + cu + d)e^u$
 $= [au^3 + (3a + b)u^2 + (2b + c)u + (c + d)]e^u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$

donc $F' = f \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 0 \\ 2b + c = 0 \\ c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3a = -3 \\ c = -2b = 6 \\ d = -c = -6 \end{cases}$

AINSI $F(u) = (u^3 - 3u^2 + 6u - 6)e^u$ donc $\int x e^{\sqrt{x}} dx = \boxed{2(x\sqrt{x} - 3x + 6\sqrt{x} - 6)e^{\sqrt{x}}}$

(c) $x = \tan(u)$
 $dx = (1 + \tan^2(u)) du$ $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{(1 + \tan^2(u))}{(1 + \tan^2(u))^2} du = \int \frac{du}{1 + \tan^2(u)} = \int \cos^2(u) du$

Or $\cos(2u) = \cos^2(u) - \sin^2(u) = 2\cos^2(u) - 1$ d'où $\cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}$

De a fait $\int \cos^2(u) du = \frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}$

d'au $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{2u + \sin(2u)}{4} = \boxed{\frac{2 \arctan(x) + \sin(2 \arctan(x))}{4}}$

(d) $\left| \begin{array}{l} u = \cos(x) \\ du = -\sin(x) dx \end{array} \right. \int \cos^2(x) \sin^3(x) dx = - \int \cos^2(x) \sin^2(x) \times (-\sin(x) dx)$
 $= - \int u^2(1-u^2) du = \int (u^4 - u^2) du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} = \boxed{\frac{\cos^5(x)}{5} - \frac{\cos^3(x)}{3}}$

EXO 11

Notons $I = \int_{1/a}^a \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$ et effectuons un changement de variable

$\left| \begin{array}{l} u = 1/t \text{ soit } t = 1/u \\ dt = -du/u^2 \end{array} \right. \text{ Alors } I = \int_a^{1/a} \frac{\ln(1/u) \times (-du)/u^2}{1 + (1/u)^2} = \int_a^{1/a} \frac{\ln(u) du}{u^2 + 1} = -I$

d'au $2I = 0$ et $\boxed{I = 0}$

EXO 12

(a) CDV $u = \sqrt{1+x^2}$ Alors $u^2 = 1+x^2$ donc $2u du = 2x dx$ soit $u du = x dx$

AINSI $\int x \sqrt{1+x^2} dx = \int \sqrt{1+x^2} \times x dx = \int u \times u du = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} = \boxed{\frac{1}{3} (1+x^2)^{3/2}}$

N.B.: le CDV $u = 1+x^2$ fonctionne aussi.

(b) CDV $u = \sqrt{2x+1}$ Alors $u^2 = 2x+1$ donc $x = \frac{u^2-1}{2}$ et $dx = u du$

d'au $\int x \sqrt{2x+1} dx = \int \frac{u^2-1}{2} \times u \times u du = \int \frac{u^4 - u^2}{2} du = \frac{u^5}{10} - \frac{u^3}{6}$

$= \boxed{\frac{\sqrt{2x+1}^5}{10} - \frac{\sqrt{2x+1}^3}{6}}$

(c) CDV $u = \sqrt{x+1}$ Alors $x = u^2 - 1$ et $dx = 2u du$

$$\text{d'où } \int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} = \int \frac{(u^2-1) 2u du}{u} = \int (2u^2-2) du = \frac{2u^3}{3} - 2u$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}(x+1)^{3/2} - 2\sqrt{x+1}}$$

(d) CDV $u = \sqrt{x}$, $x = u^2$, $dx = 2u du$

$$\text{Alors } \int \frac{x dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{u^2 \times 2u du}{u^2+u} = \int \frac{2u^2}{u+1} du$$

$$\text{or } 2u^2 = (u+1)(2u-2) + 2$$

$$\text{donc } \frac{2u^2}{u+1} = 2u-2 + \frac{2}{u+1} \text{ et } \int \frac{2u^2}{u+1} du = u^2 - 2u + 2 \ln(1+u)$$

$$\begin{array}{r|l} 2u^2 & u+1 \\ - (2u^2+2u) & 2u-2 \\ \hline -2u & \\ + (2u+2) & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{x dx}{x+\sqrt{x}} = \boxed{x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1+\sqrt{x})}$$

(e) CDV $u = \sqrt{2-x}$ d'où $u^2 = 2-x$, $x = 2-u^2$ et $dx = -2u du$

$$\text{Alors } \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}} = \int \frac{-2u du}{(2-u^2)u} = \int \frac{2 du}{u^2-2} \text{ avec } u^2-2 = (u+\sqrt{2})(u-\sqrt{2})$$

On cherche a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{2}{u^2-2} = \frac{a}{u+\sqrt{2}} + \frac{b}{u-\sqrt{2}}$ pour $|u| \neq \sqrt{2}$

$$\text{or } \frac{a}{u+\sqrt{2}} + \frac{b}{u-\sqrt{2}} = \frac{a(u-\sqrt{2})+b(u+\sqrt{2})}{u^2-2} = \frac{(a+b)u+(b-a)\sqrt{2}}{u^2-2}$$

$$\text{Il faut donc que } \begin{cases} a+b=0 \\ (b-a)\sqrt{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-b \\ 2b\sqrt{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1/\sqrt{2} \\ a=-1/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } \int \frac{2 du}{u^2-2} = \int \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{u-\sqrt{2}} - \frac{1}{u+\sqrt{2}} \right) du = \frac{1}{\sqrt{2}} (\ln|u-\sqrt{2}| - \ln|u+\sqrt{2}|) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{u-\sqrt{2}}{u+\sqrt{2}} \right|$$

$$\text{et } \int \frac{dx}{x\sqrt{2-x}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}} \right|}$$

(f) CDV on pose $u = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ d'où $\frac{x-1}{x+1} = u^2$, $x-1 = u^2 x + u^2$

$$\frac{dx}{du} = \frac{2u(1-u^2) + 2u(1+u^2)}{(1-u^2)^2} = \frac{4u}{(1-u^2)^2}$$

$$x(1-u^2) = 1+u^2$$

$$x = \frac{1+u^2}{1-u^2}$$

$$1+x^2 = 1 + \frac{(1+u^2)^2}{(1-u^2)^2} = \frac{1-2u^2+u^4+1+2u^2+u^4}{(1-u^2)^2} = \frac{2(1+u^4)}{(1-u^2)^2}$$

$$\text{donc } \frac{dx}{1+x^2} = \frac{4u du}{(1-u^2)^2} \times \frac{(1-u^2)^2}{2(1+u^4)} = \frac{2u du}{1+u^4}$$

$$\text{et } \int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{2 \int \frac{u^2 du}{1+u^4}} \dots \text{la suite est hors-programme en BCPST...}$$

EXO 13

On va utiliser la propriété $\int_0^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour f continue sur $[0,1]$

(a) Avec $f: x \mapsto 2x+1$, on obtient $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{k}{n}\right) + 1 = \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} \times k + \sum_{k=1}^n 1$

Or $\sum_{k=1}^n 1 = n$ et $\sum_{k=1}^n \frac{2}{n} k = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k = \frac{2}{n} \frac{n(n+1)}{2} = n+1$ (suite arithmétique...)

donc $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 2n+1$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 2 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$

AINSI $\boxed{\int_0^1 (2x+1) dx = 2}$

(b) Avec $f: x \mapsto e^x$, on a $\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n (e^{\frac{1}{n}})^k = e^{\frac{1}{n}} \frac{(1-e)}{1-e^{\frac{1}{n}}}$

donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n(e^{\frac{1}{n}}-1)}$

Or $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$ et $n(e^{\frac{1}{n}} - 1) \sim 1$

De plus, $e^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$ par composition de limites

si bien que

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (e-1)$ et $\boxed{\int_0^1 e^u du = e-1}$

(c) E désigne la fonction partie entière, qui vérifie $E(x) = n$ pour $n \leq x < n+1$ (avec $n \in \mathbb{Z}$). Ainsi $E(x) = 0$ pour $0 \leq x < 1$, $E(x) = 1$ pour $1 \leq x < 2$ et $E(2) = 2$. De la suite, on obtient :

• Pour $n = 2p$
$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \sum_{k=1}^{p-1} \underbrace{E\left(\frac{k}{p}\right)}_{=0} + \sum_{k=p}^{2p-1} \underbrace{E\left(\frac{k}{p}\right)}_{=1} + \underbrace{E(2)}_{=2} = p \times 1 + 1 \times 2 = p+2 = \frac{n}{2} + 2$$

donc
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{\frac{n}{2} + 2}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}$$

• Pour $n = 2p+1$
$$\sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \sum_{k=1}^p \underbrace{E\left(\frac{2k}{2p+1}\right)}_{=0} + \sum_{k=p+1}^{2p} \underbrace{E\left(\frac{2k}{2p+1}\right)}_{=1} + \underbrace{E(2)}_{=2} = p \times 1 + 1 \times 2 = p+2 = \frac{n-1}{2} + 2$$

donc
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) = \frac{\frac{n}{2} + \frac{3}{2}}{n} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2n}$$

Ces expressions montrent que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{2k}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ d'où
$$\boxed{\int_0^1 E(2z) dz = \frac{1}{2}}$$

EXO 14

Il faut reconnaître ou faire apparaître des sommes de Riemann $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$

(a)
$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \text{ avec } f: x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

Comme f est continue sur $[0,1]$,
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \boxed{\ln(2)}$$

(b)
$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k^3}{n^3} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{4}}$$

(c)
$$\ln\left(\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (n+k)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \sum_{k=1}^n \ln\left((n+k)^{\frac{1}{n}}\right) = \ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k)$$

Or $\ln(n+k) = \ln\left(n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$ donc
$$\sum_{k=1}^n \ln(n+k) = n \ln(n) + \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

d'où
$$\ln\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln(n+k) = -\ln(n) + \ln(n) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) = \boxed{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)}$$

Comme $f: x \mapsto \ln(1+x)$ est continue sur $[0,1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \ln(1+x) dx$

IPP en posant $\begin{cases} u(x) = \ln(1+x) & \text{et} & u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v'(x) = 1 & & v(x) = 1+x \end{cases}$

de sorte que $\int_0^1 \ln(1+x) dx = \left[(1+x) \ln(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 dx = 2\ln(2) - 1$

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^{1/n}\right) = 2\ln 2 - 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{k}{n})^{1/n} = e^{2\ln 2 - 1} = \boxed{\frac{4}{e}}$

(d) $\frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sqrt{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} \rightarrow \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 = \boxed{\frac{2}{3}}$

EXO 15

(a) $\sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{n(2+\frac{k}{n})}{n^2(1+\frac{k^2}{n^2})} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f: x \mapsto \frac{2+x}{1+x^2}$ sur $[0,1]$

Pour cela, $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 \frac{2dt}{1+t^2} + \int_0^1 \frac{tdt}{1+t^2} = 2 \left[\arctan(t) \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\ln(1+t^2) \right]_0^1$
 $= 2 \times \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln(2) = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\ln(2)}{2}$

(b) $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k(n-k)}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k(n-k)}{n^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)}$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)} = \int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$... intégrale H-P en BCPST

(c) $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n\sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\arcsin(x) \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$