CHAPITRE 10 — Partie I : équations du premier ordre

EXO 1 (ON RÉDIGE UN PEU !)

(a) • (E.H.) $y'+2y=0$: $a(t)=2$ donc $A(t)=2t$ $\Rightarrow$ $g_C : t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (S.P.) $y_0(t)=K$: alors $y_0'+2y_0=8 \Leftrightarrow 0+2K=8 \Leftrightarrow K=4$

• CONCLUSION : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{f : t\mapsto Ce^{-2t}+4 \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

(b) • Même équation homogène $\Rightarrow$ solutions de la forme $g_C : t\mapsto Ce^{-2t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (S.P.) : on la recherche sous la forme $y_0(t)=at^2+bt+c$ avec $a,b,c\in\mathbb{R}$

Alors $y_0'(t)=2at+b$ et $y_0'(t)+2y_0(t)=2at^2+(2a+2b)t+(b+2c)$

donc y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a=2 \\ 2a+2b=-1 \\ b+2c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3/2 \\ c=9/4 \end{cases}$

Ainsi $y_0(t)=t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{4}$

• CONCLUSION : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{f : t\mapsto Ce^{-2t}+t^2-\frac{3}{2}t+\frac{9}{4} \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

(c) • Même équation homogène $\Rightarrow$ solutions de la forme $g_C : t\mapsto Ce^{-2t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (S.P.) : on la recherche sous la forme $y_0(t)=a\sin(t)+b\cos(t)$ avec a et $b\in\mathbb{R}$

Alors $y_0'(t)=a\cos(t)-b\sin(t)$ donc $y_0'(t)+2y_0(t)=(2a-b)\sin(t)+(2b+a)\cos(t)$

donc y_0 est solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b=2 \\ 2b+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5b=4 \\ 5a=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3/5 \\ b=-4/5 \end{cases}$

Ainsi $y_0(t)=\frac{3\sin(t)-4\cos(t)}{5}$

• CONCLUSION : les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme

$$\boxed{f : t\mapsto Ce^{-2t}+\frac{3\sin(t)-4\cos(t)}{5} \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$$

(d) • (E.H.) : $y' - 3y = 2$

On a $a(t) = -3$ et $A(t) = -3t$ donc les solutions sont toutes les fonctions de la forme $g_C : t \mapsto Ce^{3t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (S.P.) : on la recherche sous la forme $y_0 = K$. Alors $y_0' - 3y_0 = -3K$ donc y_0 est solution de $(E) \Leftrightarrow -3K = 2 \Leftrightarrow K = -2/3$. Ainsi $y_0(t) = -2/3$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{f : t \mapsto Ce^{3t} - 2/3 \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

(e) • (EH) : $y' + 2y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) : $y_0(t) = Ke^{2t} \Rightarrow y_0'(t) + 2y_0(t) = 4Ke^{2t}$

donc y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow 4K = 1 \Leftrightarrow K = 1/4$. Ainsi $y_0 : t \mapsto \frac{1}{4}e^{2t}$

• CONCLUSION solutions de (E) $\boxed{f : t \mapsto Ce^{-2t} + \frac{1}{4}e^{2t} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

(f) • (EH) : $y' + y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y' + y = e^{3t}$: $y_1(t) = Ke^{3t} \Rightarrow y_1'(t) + y_1(t) = 4Ke^{3t}$

Il faut que $4K = 1$ soit $K = 1/4$ et $y_1 : t \mapsto \frac{1}{4}e^{3t}$

• (SP2) pour $y' + y = 2\sin(t)$: $y_2(t) = a\sin(t) + b\cos(t)$

$\Rightarrow y_2'(t) + y_2(t) = (a+b)\cos(t) + (a-b)\sin(t)$

Il faut que $\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=2 \end{cases}$ soit $a = 1$ et $b = -1$ d'où $y_2 : t \mapsto \sin(t) - \cos(t)$

• (SP3) pour $y' + y = t^2$: $y_3(t) = at^2 + bt + c$

$\Rightarrow y_3'(t) + y_3(t) = at^2 + (b+2a)t + (c+b)$

Il faut que $\begin{cases} a = 1 \\ b + 2a = 0 \\ c + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$ d'où $y_3 : t \mapsto t^2 - 2t + 2$

• CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme

$$\boxed{f : t \mapsto Ce^{-t} + \frac{1}{4}e^{3t} + \sin(t) - \cos(t) + t^2 - 2t + 2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

(g). • (EH) : $y'+3y=0 \Rightarrow$ solution $g_C : t \mapsto Ce^{-3t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (SP) : $y_0(t)=Ke^t \Rightarrow y_0'(t)+3y_0(t)=4Ke^t$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow 4K=1 \Leftrightarrow K=1/4$. Ainsi $y_0 : t\mapsto \frac{1}{4}e^t$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{f : t\mapsto Ce^{-3t}+\frac{1}{4}e^t \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

(h) • (EH) : $y'-3y=0 \Rightarrow$ solution $g_C : t\mapsto Ce^{3t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (SP) : $y_0(t)=P(t)e^{-t} \Rightarrow y_0'(t)-3y_0(t)=P'(t)e^{-t}-P(t)e^{-t}-3P(t)e^{-t}=(P'(t)-4P(t))e^{-t}$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow P'(t)-4P(t)=t^3+1 \quad \forall t\in\mathbb{R}$

On pose alors $P(t)=at^3+bt^2+ct+d$ de sorte que $P'(t)=3at^2+2bt+c$

et $P'(t)-4P(t)=-4at^3+(3a-4b)t^2+(2b-4c)t+(c-4d)$

Il faut donc que $\begin{cases}-4a=1\\3a-4b=0\\2b-4c=0\\c-4d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-1/4\\b=-3/16\\c=b/2=-3/32\\d=\frac{c-1}{4}=-35/128\end{cases}$

d'où $P(t)=-\frac{t^3}{4}-\frac{3t^2}{16}-\frac{3}{32}t-\frac{35}{128}$ et $y_0(t)=-\left(\frac{t^3}{4}+\frac{3t^2}{16}+\frac{3t}{32}+\frac{35}{128}\right)e^{-t}$

• CONCLUSION les solution de l'équation sont toutes les fonctions de la forme

$\boxed{f : t\mapsto Ce^{3t}-\left(\frac{t^3}{4}+\frac{3t^2}{16}+\frac{3}{32}t+\frac{35}{128}\right)e^{-t} \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

(i). • (E.H.) : $y'+y=0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t\mapsto Ce^{-t}$ avec $C\in\mathbb{R}$

• (SP) : $y_0(t)=a\cos(t)+b\sin(t) \Rightarrow y_0'(t)+y_0(t)=(a+b)\cos(t)+(b-a)\sin(t)$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases}a+b=0\\b-a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=1/2\\a=-1/2\end{cases}$

soit $y_0(t)=\frac{\sin(t)-\cos(t)}{2}$

• CONCLUSION les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $\boxed{f : t\mapsto Ce^{-t}+\frac{\sin(t)-\cos(t)}{2} \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

EXO 2 (MÊME RÉDACTION)

(a) • (E.H.) $y'-5y=0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^{5t} \Rightarrow y_0'(t) = C'(t)e^{5t} + 5C(t)e^{5t}$

d'où $y_0'(t) - 5C(t)e^{5t} = C'(t)e^{5t}$

et y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = 1$. On peut prendre $C(t) = t$

si bien que $y_0 : t \mapsto te^{5t}$

• CONCLUSION: les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f : t \mapsto (C+t)e^{5t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) • (E.H.) $y'-y=0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^{t} \Rightarrow y_0'(t) = C'(t)e^{t} + C(t)e^{t}$

d'où $y_0'(t) - y_0(t) = C'(t)e^{t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = t^2+1$. On peut prendre $C(t) = \frac{t^3}{3} + t$

si bien que $y_0 : t \mapsto \left(\frac{t^3}{3} + t\right)e^{t}$

• CONCLUSION: les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme $f : t \mapsto \left(\frac{t^3}{3} + t + C\right)e^{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c) • (E.H.) $y'+2y=0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)e^{-2t} \Rightarrow y_0'(t) = C'(t)e^{-2t} - 2C(t)e^{-2t}$

donc $y_0'(t) + 2y_0(t) = C'(t)e^{-2t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) = \cos(t)$. On peut prendre $C(t) = \sin(t)$

si bien que $y_0 : t \mapsto \sin(t)e^{-2t}$

• CONCLUSION: les solutions de l'équation sont toutes les fonctions $f : t \mapsto (\sin(t) + C)e^{-2t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(d) • (E.H.) $y'-y=0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y'-y = 2\sin(t)$: $y_1(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$

On obtient $y_1'(t) - y_1(t) = (b-a)\cos(t) - (a+b)\sin(t)$

donc y_1 solution de $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} -a-b=2 \\ b-a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = -1$

Ainsi $y_1(t) = -\cos(t) - \sin(t)$

- (SP2) pour $y' - y = \frac{e^t}{t^2+1}$: $y_2(t) = C(t)e^t$

Alors $y_2'(t) - y(t) = C'(t)e^t$ donc y_2 solution de $(E_2) \Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{1+t^2}$
On peut prendre $C(t) = \arctan(t)$ d'où $y_2(t) = \arctan(t)e^t$

- CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solution de l'équation sont les fonctions

$$\boxed{f : t \mapsto Ce^t - \cos(t) - \sin(t) + \arctan(t)e^t \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

(e) • (E.H.) $y' + y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-t}$ avec $C \in \mathbb{R}$

- (SP1) pour $y' + y = (t+2)e^t$: $y_1 = (at+b)e^t$
  Alors $y_1'(t) + y_1(t) = ae^t + (at+b)e^t + (at+b)e^t = (2at + a + 2b)e^t$
  donc y_1 solution de $(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ a + 2b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 3/4 \end{cases}$
  AINSI $y_1 : t \mapsto \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t$
- (SP2) pour $y' + y = \frac{1}{1+e^t}$: $y_2(t) = C(t)e^{-t}$

  Alors $y_2'(t) + y_2(t) = C'(t)e^{-t} - C(t)e^{-t} + C(t)e^{-t} = C'(t)e^{-t}$
  donc y_2 solution de $(E_2) \Leftrightarrow C'(t)e^{-t} = \frac{1}{1+e^t}$
  $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{e^t}{1+e^t}$: on peut prendre $C(t) = \ln(1+e^t)$
  AINSI $y_2 : t \mapsto \ln(1+e^t)e^{-t}$
- CONCLUSION d'après le principe de superposition des solutions, les solutions sont toutes les fonctions

$$\boxed{f : t \mapsto Ce^{-t} + \left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4}\right)e^t + \ln(1+e^t)e^{-t} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$$

(f) • (E.H.) $y' - y = 0 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^t$

- (SP) $y_0(t) = C(t)e^t \Rightarrow y_0'(t) - y_0(t) = C'(t)e^t$
  AINSI y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ et on peut prendre $C(t) = \arcsin(t)$
- CONCLUSION $\boxed{f : t \mapsto (\arcsin(t) + C)e^t \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

EXO 3

(1) • Soit f une telle fonction. On pose $g : x \mapsto f(x)f(-x)$: la fonction g est dérivable et $g'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$

$= f'(x)f(-x) - f'(-x)f(-(-x)) = 1 - 1 = 0$

donc $g(x) = c^{te} = f(0)^2$ QUESTION : $f(0)$ peut-il être nul ?

• En outre $f'(x)f(-x) = 1 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(0)f(0) = 1 \Rightarrow f(0) \neq 0$

AINSI $g(x) = f(x)f(-x) = f(0)^2 \neq 0$

et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} f'(x)f(-x) = 1 \\ f(x)f(-x) = f(0)^2 \neq 0 \end{cases}$ d'où $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{f(0)^2}$ et $f'(x) = \frac{1}{f(0)^2} f(x)$

• On déduit de cette (E.H.) que $\boxed{f(x) = C e^{x/f(0)^2} = C e^{x/C^2}}$ avec $C = f(0) \in \mathbb{R}^*$

(2) Réciproquement, si $f : x \mapsto C e^{x/C^2}$ avec $C \in \mathbb{R}^*$, on a bien une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{C} e^{x/C^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

si bien que $\boxed{f'(x)f(x) = \frac{1}{C} e^{x/C^2} \times C e^{-x/C^2} = 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$

EXO 4

1) Pour $x = y = 0$ on obtient $f(0) = f(0)^2$. OR $x = x^2 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou 1

De ce fait, on a nécessairement $\boxed{f(0) = 0}$ ou $\boxed{f(0) = 1}$.

2) Fixons $y \in \mathbb{R}$ et dérivons la relation $f(x+y) = f(x)f(y)$ par rapport à x.

On obtient : $\forall x \in \mathbb{R} \ f'(x+y) = f'(x) \times f(y)$

d'où pour $x = 0$ $f'(y) = f'(0) \times f(y)$

Ceci étant valable pour tout $y \in \mathbb{R}$, il vient $\boxed{\forall y \in \mathbb{R} \ f'(y) = f'(0) f(y)}$

3) De ce fait $f : y \mapsto C e^{f'(0) y}$ avec $C = f(0) \in \{0 ; 1\}$ et $f'(0) \in \mathbb{R}$

d'où $\boxed{f = 0}$ ou $\boxed{f : y \mapsto e^{\alpha y}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ || ON VÉRIFIE QUE CES FONCTIONS SATISFONT L'ÉQUATION INITIALE

EXO5

- On effectue le changement de fonction inconnue $z = 1/y$ soit $y = 1/z$, avec z dérivable. Alors

$$y' = y(1-y) \Leftrightarrow \frac{-z'}{z^2} = \frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow -z' = z - 1$$

$$\Leftrightarrow z' + z = 1$$

Ce changement de fonction est très classique et parfaitement adapté aux ÉQUATIONS DE BERNOULLI, qui sont de la forme $y' = ay + by^2$

- (E.H.) $z' + z = 0 \rightsquigarrow g_C : t \mapsto Ce^{-t}$
- (S.P.) $z_0(t) = K \rightsquigarrow K = 1$ donc $z_0(t) = 1$
- CONCLUSION $z : t \mapsto Ce^{-t} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$

- Ainsi les solutions de l'équation initiale sont les fonctions

$$\boxed{y : t \mapsto \frac{1}{Ce^{-t}+1} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

EXO6 (MAINTENANT $a(t)$ N'EST PLUS CONSTANTE)

(a) • (EH) : $y' + ty = 0 \rightsquigarrow a(t) = t$, $A(t) = \frac{-t^2}{2} \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-t^2/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) : $y_0(t) = at^2 + bt + c$. Alors $y_0'(t) + ty_0(t) = 2at + b + t(at^2 + bt + c)$

$$= at^3 + bt^2 + (2a+c)t + b$$

donc y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 2a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, b = 0$ et $c = -2$.

Ainsi $y_0 : t \mapsto t^2 - 2$.

• CONCLUSION $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont toutes les fonctions de la forme } f : t \mapsto Ce^{-t^2/2} + t^2 - 2 \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

(b) • (EH) : $y' + 3t^2y = 0 \rightsquigarrow a(t) = 3t^2$, $A(t) = t^3 \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-t^3}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP1) pour $y' + 3t^2y = t^2$: $y_1(t) = K$. Alors $y_1' + 3t^2y_1 = 3Kt^2$ donc y_1 solution $\Leftrightarrow K = 1/3$

• (SP2) pour $y' + 3t^2y = e^{-t^3}$: $y_2(t) = C(t)e^{-t^3}$. Alors $y_2'(t) = C'(t)e^{-t^3} - 3t^2C(t)e^{-t^3}$

soit $y_2'(t) + 3t^2y_2(t) = C'(t)e^{-t^3}$

donc y_2 solution $\Leftrightarrow C'(t) = 1$: on peut prendre $C(t) = t$ soit $y_2(t) = te^{-t^3}$

• **CONCLUSION** : $\boxed{\text{d'après le principe de superposition, les solutions sont les fonctions } f : t \mapsto (t+C)e^{-t^3} + \frac{1}{3} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

(c) • (EH) $y' + \tan(t)y = 0 \leadsto a(t) = \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et $A(t) = -\ln|\cos(t)|$

donc les solutions sont les fonctions $g_C : t \mapsto Ce^{+\ln|\cos t|} = \pm C\cos(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)\cos(t)$. Alors $y_0'(t) + \tan(t)y_0(t) = C'(t)\cos(t) - \cancel{C(t)}\sin(t) + \cancel{C(t)}\sin(t)$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t)\cos(t) = \sin(t) \Leftrightarrow C'(t) = \tan(t) = a(t)$

On peut prendre $C(t) = A(t) = -\ln|\cos(t)|$ soit $y_0 : t \mapsto -\ln|\cos(t)|\cos(t)$

• **CONCLUSION** $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont toutes les fonctions } f : t \mapsto (-\ln|\cos(t)| + C)\cos(t) \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

REMARQUE : cette résolution n'est valable que sur un intervalle de la forme $]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$, pour que l'équation soit bien définie !!!

(d) On résout l'équation sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$, pour pouvoir diviser par t et obtenir $y' - \frac{1}{t}y = te^t$

• (E.H) $y' - \frac{1}{t}y = 0 \leadsto a(t) = -\frac{1}{t}$, $A(t) = -\ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{\ln|t|} = \pm Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)t$. Alors $y_0'(t) - \frac{1}{t}y_0(t) = C'(t)t + C(t) - C(t) = C'(t)t$

donc y_0 est solution $\Leftrightarrow C'(t)t = te^t \Leftrightarrow C'(t) = e^t$. On peut prendre $C(t) = e^t$

si bien que $y_0 : t \mapsto te^t$

CONCLUSION $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont toutes les fonctions } f : t \mapsto (e^t + C)t \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

REMARQUE : en toute rigueur, les solutions sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle sont toutes les fonctions $f : \begin{cases} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} (e^t + C_1)t & \text{si } t < 0 \\ (e^t + C_2)t & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{cases}$

avec C_1 et C_2 deux constantes réelles (pas forcément égales)

(e) On résout l'équation sur $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$ ou $]1,+\infty[$ pour pouvoir diviser par $(1-t^2)$ et obtenir $\boxed{y' - \frac{2t}{1-t^2}\, y = \frac{1}{1-t^2}}$

• (EH) $y' - \frac{2t}{1-t^2} = 0 \leadsto a(t) = \frac{-2t}{1-t^2}$ et $A(t) = \ln|1-t^2|$

$\Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-\ln|1-t^2|} = \frac{\pm C}{1-t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = \frac{C(t)}{1-t^2}$. Alors $y_0'(t) - \frac{2t}{(1-t^2)} y_0(t) = \frac{C'(t)}{1-t^2} + \frac{2t\,C(t)}{(1-t^2)^2} - \frac{2t\,C(t)}{(1-t^2)^2} = \frac{C'(t)}{1-t^2}$

d'où y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = 1$. On peut prendre $C(t) = t$ soit $y_0(t) = \frac{t}{1-t^2}$

• CONCLUSION $\boxed{\text{Les solutions de }(E)\text{ sont toutes les fonctions de la forme } f : t \mapsto \frac{t+C}{1-t^2} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

En toute rigueur, les solutions définies sur $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ sont les fonctions

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}\setminus\{-1;1\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \frac{t+C_1}{1-t^2} & \text{si } t<-1 \\ \frac{t+C_2}{1-t^2} & \text{si } -1<t<1 \\ \frac{t+C_3}{1-t^2} & \text{si } t>1 \end{cases} \end{array} \right.$$

On peut alors chercher les valeurs de C_1, C_2 et C_3 pour lesquelles les fonctions se prolongent en 1 et/ou en -1

avec C_1, C_2 et C_3 trois constantes réelles

(f) L'équation s'écrit $\boxed{y' - \frac{t}{1+t^2}\, y = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$ après division par $1+t^2$

• (E.H.) $y' - \frac{t}{1+t^2} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{-t}{1+t^2}$ et $A(t) = -\frac{1}{2}\ln(1+t^2)$

Les solutions sont les fonctions $g_C : t \mapsto Ce^{\frac{1}{2}\ln(1+t^2)} = C\sqrt{1+t^2}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)\sqrt{1+t^2}$. Alors $y_0'(t) - \frac{t}{1+t^2} y_0(t) = C'(t)\sqrt{1+t^2} + \cancel{\frac{t\,C(t)}{\sqrt{1+t^2}}} - \cancel{\frac{t\,C(t)}{\sqrt{1+t^2}}}$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t)\sqrt{1+t^2} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Leftrightarrow C'(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

On peut prendre $C(t) = \arctan(t)$ soit $y_0(t) = \arctan(t)\sqrt{1+t^2}$

• CONCLUSION $\boxed{\text{les solutions de l'équation sont les fonctions } f : t \mapsto (\arctan(t) + C)\sqrt{1+t^2} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

EXO 7 (AVEC LES RECHERCHES DE PROLONGEMENT, ÇA DEVIENT LONG !)

(a) On résout l'équation sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$: elle s'écrit $\boxed{y'+\frac{1}{t}y=\frac{1}{t}}$

• (E.H.) $y'+\frac{1}{t}y=0 \leadsto a(t)=1/t$, $A(t)=\ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_C : t\mapsto Ce^{-\ln|t|}=\frac{C}{|t|}=\pm\frac{C}{t}$

• (SP) $y_0(t)=C(t)/t$. Alors $y_0'(t)=\frac{tC'(t)-C(t)}{t^2}=\frac{C'(t)}{t}-\frac{C(t)}{t^2}$ donc $y_0'(t)+\frac{1}{t}y_0(t)=\frac{C'(t)}{t}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t)=1$: on peut prendre $C(t)=t$ soit $y_0(t)=1$!

C'est malin, on aurait pu s'en apercevoir plus tôt, oh là là !

• CONCLUSION $\boxed{\text{les solutions de l'équation sur }]-\infty,0[\text{ et sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions de la forme } f : t\mapsto \frac{C}{t}+1 \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

• SOLUTIONS MAXIMALES

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f : t\mapsto \begin{cases}\frac{C}{t}+1 & \text{si } t>0\\ \frac{D}{t}+1 & \text{si } t<0\end{cases}$ avec C et $D\in\mathbb{R}$. Peut-on les prolonger en 0 ?

Pour que f ait une limite finie en 0^+, il faut nécessairement que $C=0$. De même, $D=0$ pour la limite en 0^-. Alors $f : t\mapsto 1$, qui est bien solution !

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{la seule solution définie sur } \mathbb{R} \text{ est la fonction } f : t\mapsto 1}$

(b) On résout l'équation sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$: elle s'écrit $\boxed{y'-\frac{2}{t}y=t^2}$

• (E.H.) $y'-\frac{2}{t}y=0 \Rightarrow a(t)=-2/t$, $A(t)=-2\ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_C : t\mapsto Ce^{2\ln|t|}=Ct^2$

• (SP) $y_0(t)=Kt^3$. Alors $y_0'(t)-\frac{2}{t}y_0(t)=3Kt^2-2Kt^2=Kt^2$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow K=1$ càd $y_0(t)=t^3$

CONCLUSION $\boxed{\text{les solutions de l'équation sur }]-\infty,0[\text{ et sur }]0,+\infty[\text{ sont les fonctions } f : t\mapsto Ct^2+t^3 \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

SOLUTIONS MAX les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f : t\mapsto \begin{cases}Ct^2+t^3 & \text{si } t>0\\ Dt^2+t^3 & \text{si } t<0\end{cases}$
avec C et $D\in\mathbb{R}$

Ces fonctions se prolongent en 0 car $\lim_{t\to 0} Ct^2+t^3 = 0 = \lim_{t\to 0} Dt^2+t^3$ quels que soient les réels C et D. On pose ainsi $f(0)=0$

De plus, le prolongement est encore dérivable en 0 car

$$\begin{cases} \forall t>0 \quad \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = Ct+t^2 \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \\ \forall t<0 \quad \dfrac{f(t)-f(0)}{t-0} = Dt+t^2 \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0 \end{cases}$$ si bien que $f'(0)=0$

Ainsi $\boxed{\text{les solutions maximales de } (E) \text{ sont les fonctions } f : t \mapsto \begin{cases} Ct^2+t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ Dt^2+t^3 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \text{ avec } C \text{ et } D \in \mathbb{R}}$

(c) On résout l'équation sur $]-\infty;1[$ et $]1,+\infty[$: elle s'écrit $\boxed{y' - \dfrac{1}{1-t} y = \dfrac{t}{1-t}}$

- (E.H.) : $y' - \frac{1}{1-t} y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{-1}{1-t}$, $A(t) = \ln|t-1| \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{-\ln|t-1|} = \dfrac{C}{|t-1|}$
- (SP) : $y_0(t) = \dfrac{C(t)}{t-1}$. Alors $y_0'(t) = \dfrac{C'(t)}{t-1} - \dfrac{C(t)}{(t-1)^2}$ soit $y_0'(t) - \dfrac{1}{1-t} y_0(t) = \dfrac{C'(t)}{t-1}$

Ainsi y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = -t$: on peut prendre $C(t) = -t^2/2$ soit $y_0(t) = \dfrac{-t^2}{2(t-1)}$

- Conclusion $\boxed{\text{les solutions de l'équation sur }]-\infty;1[\text{ et }]1,+\infty[\text{ sont les fonctions } f : t \mapsto \dfrac{C}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

Solutions maximales

Les solutions sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ sont les fonctions $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{C}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} & \text{si } t>1 \\ \dfrac{D}{t-1} - \dfrac{t^2}{2(t-1)} & \text{si } t<1 \end{cases}$ avec C et $D \in \mathbb{R}$ deux constantes réelles.

Examinons les limites en 1 : pour $t>1$, $f(t) = \dfrac{2C-t^2}{2(t-1)}$ donc $f(t) \xrightarrow[\substack{t\to 1 \\ t>1}]{} \pm\infty$ si $2C \neq 1$ et pour $C = 1/2$, il vient $f(t) = \dfrac{1-t^2}{2(t-1)} = -\dfrac{(t+1)}{2} \xrightarrow[t\to 1]{} -1$

Même chose à gauche : f admet une limite finie en 1^- ssi $D = 1/2$, auquel cas $f : t \mapsto \dfrac{-1-t}{2}$

Ainsi $\boxed{\text{la seule solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est } f : t \mapsto \dfrac{-t-1}{2}}$

(d) • On résout l'équation sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{1}{t^2}y = 0$

C'est une équation homogène, ça ira vite !

• On a ici $a(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $A(t) = \frac{1}{t} \Rightarrow$ solutions $\boxed{g_C : t \mapsto Ce^{-1/t}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

• SOLUTIONS MAXIMALES

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont les fonctions $f : t \mapsto \begin{cases} Ce^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ De^{-1/t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$

avec C et $D \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} * \lim\limits_{t\to 0^+} -1/t = -\infty \text{ donc } \lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0 \text{ (composition)} \\ * \lim\limits_{t\to 0^-} -1/t = +\infty \text{ donc } \lim\limits_{t\to 0^-} e^{-1/t} = +\infty \text{ : ainsi, } f \text{ n'a une limite finie en } 0^- \text{ que si } D = 0 \end{cases}$

On peut prolonger f en 0 dans ce cas et on obtient

$$\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} Ce^{-1/t} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } C \in \mathbb{R}}$$

Il reste à vérifier que cette fonction est dérivable en 0

$\begin{cases} * \text{ Pour } t < 0, \ f(t) = 0 \text{ donc } \lim\limits_{t\to 0^-} \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = 0 \qquad (f(0)=0) \\ * \text{ Pour } t > 0 \quad \frac{f(t)-f(0)}{t-0} = \frac{1}{t}e^{-1/t} = -(-1/t)e^{-1/t} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissances comparées} \end{cases}$

car $\lim\limits_{t\to 0^+} -1/t = -\infty$

Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

EXO 8 (ENCORE UN EXERCICE LONG)

On résout cette équation homogène sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$: elle s'écrit $y' - \frac{\alpha}{t^n}y = 0$

⚠ J'AVAIS OUBLIÉ QUE $\alpha > 0$ DANS L'ÉNONCÉ DU COUP LES CAS $\alpha = 0$ ET $\alpha < 0$ SONT INUTILES

avec $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{\text{Si } n = 1}$

$a(t) = -\alpha/t$ et $A(t) = -\alpha \ln|t| \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto Ce^{\alpha \ln|t|} = C|t|^\alpha$

avec $C \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont alors les fonctions $f : t \mapsto \begin{cases} Ct^\alpha & \text{si } t > 0 \\ D(-t)^\alpha & \text{si } t < 0 \end{cases}$

• Si $\alpha < 0$, f ne se prolonge en 0 que si $C = D = 0$

car $\lim\limits_{t\to 0^+} t^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} (-t)^\alpha = +\infty$

donc dans le cas $\alpha<0$, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{f : t \mapsto 0}$

- Si $\alpha = 0$, alors $f : t \mapsto \begin{cases} C & \text{si } t>0 \\ D & \text{si } t<0 \end{cases}$ se prolonge en 0 uniquement si $D = C$

Dans ce cas, les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions constantes $\boxed{f : t \mapsto C}$

- Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{t\to 0} f(t) = 0$ donc f se prolonge en 0 en posant $f(0) = 0$

Mais pour la dérivabilité en 0, comme $\frac{f(t)}{t} = \begin{cases} C t^{\alpha-1} & \text{si } t>0 \\ D(-t)^{\alpha-1} & \text{si } t<0 \end{cases}$, on en déduit que

→ si $0<\alpha<1$, f n'est dérivable en 0 que pour $C = D = 0$. De ce fait, la seule solution définie sur $\mathbb{R}$ est $\boxed{f : t \mapsto 0}$

→ si $\alpha = 1$, f n'est dérivable en 0 que pour $C = -D$. De ce fait, les seules solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boxed{f : t \mapsto Ct}$ avec $C \in \mathbb{R}$

→ si $\alpha>1$, $\frac{f(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

Ainsi, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions $\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} C t^{\alpha} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ D(-t)^{\alpha} & \text{si } t<0 \end{cases}}$ avec C et D deux constantes réelles.

$\boxed{\text{Si } n>1}$ et $\alpha>0$

$a(t) = -\alpha t^{-n}$ et $A(t) = -\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n} \Rightarrow$ solutions $g_C : t \mapsto C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Les solutions sur $\mathbb{R}^*$ sont alors les fonctions $f : t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t>0 \\ D e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t<0 \end{cases}$ avec C et D deux réels. Examinons le prolongement en 0.

Comme $n>1$, $\lim\limits_{t\to 0^+} t^{1-n} = +\infty$ donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \alpha \frac{t^{1-n}}{1-n} = -\infty$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 0$ $\forall C \in \mathbb{R}$

De m., $\lim\limits_{t\to 0^-} \alpha \frac{t^{1-n}}{1-n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair } (1-n \text{ pair donc } t^{1-n} \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} +\infty) \\ +\infty & \text{si } n \text{ pair } (1-n \text{ impair donc } t^{1-n} \underset{t\to 0^-}{\longrightarrow} -\infty) \end{cases}$

donc $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = 0$ $\forall D$ si n impair / $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t)$ admet une limite $<\infty$ (qui sera 0) uniquement pour $D = 0$ si n pair

Les solutions définies sur $\mathbb{R}$ sont donc :

* si n est impair $\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ D e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t<0 \end{cases}}$

* si n est pair $\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} C e^{\alpha \frac{t^{1-n}}{1-n}} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t\leq 0 \end{cases}}$

Ces fonctions sont bien dérivables en 0 car $\lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{t} = 0$ par croissances comparées (à détailler à l'aide du changement de variables $u = t^{1-n}$)

EXO 9 (ON RETROUVE DES ÉQUATIONS UN PEU PLUS HUMAINES !)

(a) . (EH) $y' + \cos(t) y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \cos(t)$ et $A(t) = \sin(t)$

solutions $g_c : t \mapsto Ce^{-\sin(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

. (SP) $y_0(t) = C(t) e^{-\sin(t)}$. Alors $y_0'(t) = C'(t) e^{-\sin(t)} - C(t)\cos(t) e^{-\sin(t)}$

d'où $y_0'(t) + \cos(t) y_0(t) = C'(t) e^{-\sin(t)}$

AINSI y_0 solution de (E) $\Leftrightarrow C'(t) e^{-\sin(t)} = \sin(t)\cos(t)$

$\Leftrightarrow C'(t) = \cos(t)\sin(t) e^{\sin(t)}$

Alors $C(t) = \int \sin(t) e^{\sin(t)} \cos(t)\, dt = \int u e^u\, du$ CDV $\left| \begin{array}{l} u = \sin(t) \\ du = \cos(t)\, dt \end{array}\right.$

Primitive de ue^u : $F(u) = (au+b)e^u$ pour $u \in \mathbb{R}$

$F'(u) = ae^u + (au+b)e^u = (au + a + b)e^u$

donc $F'(u) = ue^u \Leftrightarrow a = 1$ et $a+b = 0 \Leftrightarrow a = 1$ et $b = -1$

soit $F(u) = (u-1)e^u$.

Dans notre cas, on a donc $C(t) = (u-1)e^u = (\sin(t) - 1) e^{\sin(t)}$ d'où $y_0 : t \mapsto \sin(t) - 1$

. CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto Ce^{-\sin(t)} + \sin(t) - 1}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(b) Sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $(E) \Leftrightarrow y' + y\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = e^{-t}\cos(t)$

• (EH) $y' + \frac{\sin t}{\cos t}y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$ et $A(t) = -\ln(\cos t)$

solutions $g_c : t \mapsto Ce^{\ln(\cos t)} = C\cos t$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)\cos(t)$. Alors $y_0'(t) = C'(t)\cos(t) - C(t)\sin(t)$

donc $y_0'(t) + \frac{\sin(t)}{\cos(t)}y_0(t) = C'(t)\cos(t) - C(t)\sin(t) + C(t)\sin(t) = C'(t)\cos(t)$

AINSI y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = e^{-t}$: on peut prendre $C(t) = -e^{-t}$ soit $y_0(t) = -e^{-t}\cos(t)$

• CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto (C - e^{-t})\cos(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

(c) Sur $\left]0,\pi/2\right[$ $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{y}{\tan t} = \frac{\sin t}{\tan t} \Leftrightarrow y' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}y = \cos(t)$

• (E.H.) $y' + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ et $A(t) = \ln(\sin t)$

solutions $g_c : t \mapsto Ce^{-\ln(\sin t)} = C/\sin(t)$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)/\sin(t)$. Alors $y_0'(t) = \frac{C'(t)}{\sin(t)} - \frac{C(t)\cos(t)}{\sin(t)^2} = \frac{C'(t)}{\sin(t)} - y_0(t)\frac{\sin(t)}{\cos(t)}$

donc $y_0'(t) + \frac{\cos(t)}{\sin(t)}y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sin(t)}$

AINSI y_0 solution de $(E) \Leftrightarrow C'(t) = \sin(t)\cos(t)$: on peut prendre $C(t) = \frac{1}{2}\sin(t)^2$

soit $y_0(t) = \frac{1}{2}\sin(t)$

CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto \frac{C}{\sin(t)} + \frac{1}{2}\sin(t)}$ avec $C \in \mathbb{R}$

Pour cette équation, on obtient même une sol$^{\circ}$ sur $]0,\pi[$... pas surprenant car l'équation $y' + \frac{\cos t}{\sin t}y = \cos t$ est définie sur cet intervalle

POUR CES ÉQUATIONS (b) & (c), ON S'EST CONTENTÉS ICI DE LA RÉSOLUTION SUR UN INTERVALLE ... ON PEUT ÉVIDEMMENT RECHERCHER DES SOLUTIONS MAXIMALES

EXO 10 (UNE DERNIÈRE RECHERCHE DE SOLUTION MAXIMALE !)

• Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ $(E) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{2t} y = \frac{1}{2t(t+1)}$

On va résoudre (E) sur $]0,+\infty[$, $]-1,0[$ et $]-\infty;-1[$. Commençons par $]0,+\infty[$

• (EH) $y' + \frac{1}{2t} y = 0 \leadsto a(t) = \frac{1}{2t}$ et $A(t) = \frac{1}{2}\ln(t)$

Solutions $g_c : t \mapsto c e^{-\frac{1}{2}\ln(t)} = \frac{c}{\sqrt{t}}$ avec $c \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = C(t)/\sqrt{t}$ Alors $y_0'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{C(t)}{2t\sqrt{t}} = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t} y_0(t)$

d'où $y_0'(t) + \frac{1}{2t} y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{t}}$. De ce fait, y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{\sqrt{t}}{2t(t+1)} = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}$

Ainsi $C(t) = \int \frac{dt}{2\sqrt{t}(t+1)} = \int \frac{2u\,du}{2u(u^2+1)} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan(u) = \arctan(\sqrt{t})$

avec le CDV $\left[\begin{array}{l} u = \sqrt{t} \\ t = u^2 \\ dt = 2u\,du \end{array}\right.$

et $y_0 : t \mapsto \frac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$

• CONCLUSION solutions sur $]0,+\infty[$ $\boxed{f : t \mapsto \frac{c + \arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}}$ avec $c \in \mathbb{R}$

Et maintenant passons à $]-1,0[$

• (EH) $\leadsto$ on a $\ln|t|$ au lieu de $\ln(t)$, ce qui mène à $g_c : t \mapsto \frac{c}{\sqrt{|t|}} = \frac{c}{\sqrt{-t}}$

(SP) $y_0(t) = C(t)/\sqrt{-t}$ Alors $y_0'(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}} + \frac{C(t)}{2(-t)\sqrt{-t}} = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}} - \frac{1}{2t} y_0(t)$

⚠ $t = -(-t)$
$= -\sqrt{-t}^2$

d'où $y_0'(t) + \frac{1}{2t} y_0(t) = \frac{C'(t)}{\sqrt{-t}}$ et y_0 solution $\Leftrightarrow C'(t) = \frac{\sqrt{-t}}{2t(t+1)} = \frac{-1}{2\sqrt{-t}(t+1)}$

Ainsi $C(t) = \int \frac{-dt}{2\sqrt{-t}(t+1)} = \int \frac{+2u\,du}{2u(1-u^2)} = \int \frac{-du}{u^2-1}$

CDV $\left[\begin{array}{l} u = \sqrt{-t} \in]0,1[\\ t = -u^2 \\ dt = -2u\,du \end{array}\right.$

$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+1} - \frac{1}{2}\int \frac{du}{u-1} = \frac{1}{2}\left(\ln|u+1| - \ln|u-1|\right)$

$\boxed{\frac{-1}{u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1}\right)}$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t})\right)$

et $\underbrace{y_0(t) = \dfrac{\ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}}}$

<u>CONCLUSION</u> solutions sur $]-1,0[$ $\boxed{f : t \mapsto \dfrac{2C + \ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

<u>Et on termine avec $]-\infty;-1[$</u>

Pas de grosse différence avec le cas précédent, le $\ln|1-\sqrt{-t}|$ dans l'expression de $C(t)$ devient cette fois-ci $\ln(\sqrt{-t}-1)$ au lieu de $\ln(1-\sqrt{-t})$

solutions sur $]-\infty;-1[$ $\boxed{f : t \mapsto \dfrac{2C + \ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(\sqrt{-t}-1)}{2\sqrt{-t}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

<u>Solutions sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0\}$</u>

$$\boxed{f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{C + \arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{2D + \ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}} & \text{si } -1 < t < 0 \\ \dfrac{2E + \ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(\sqrt{-t}-1)}{2\sqrt{-t}} & \text{si } t < -1 \end{cases}}$$

Peut-on les prolonger en 0 ou en -1 ?

* En -1, c'est raté car $\lim_{t \to -1} |1-\sqrt{-t}| = 0^+$ donc $\lim_{t \to -1} \ln|1-\sqrt{-t}| = -\infty$

donc $\lim_{t \to -1} f = -\infty$ indépendamment des valeurs de D et E

* En 0 : comme $\sqrt{t} \to 0$ et $\sqrt{-t} \to 0$, il faut que $C + \arctan\sqrt{t} \to 0$ soit $C = 0$

et $2D + \ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t}) \to 0$ soit $D = 0$

Examinons donc le prolongement en 0 de la fonction définie sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ par $f : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\arctan(\sqrt{t})}{\sqrt{t}} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t})}{2\sqrt{-t}} & \text{si } -1 < t < 0 \end{cases}$

On sait que $\arctan u \underset{0}{\sim} u$ donc $\arctan\sqrt{t} \underset{0}{\sim} \sqrt{t}$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t) = 1$

De même $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$ donc $\ln(1+\sqrt{-t}) - \ln(1-\sqrt{-t}) = 2\sqrt{-t} + o(\sqrt{-t}) \sim 2\sqrt{-t}$
et $\lim\limits_{t\to 0^-} f(t) = 1$

Ainsi on peut prolonger f en 0 en posant $\boxed{f(0)=1}$

Pour étudier la dérivabilité, il va falloir patienter un peu car les Développements Limités vont s'avérer indispensables !

EXO 11 (AAAH, UN PROBLÈME DE CAUCHY !)

Sur $]0,+\infty[$, l'équation s'écrit $y' + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y = \frac{e^t}{t^2+1}$

- (EH) $y' + \left(\frac{1}{t}-1\right) y = 0 \rightsquigarrow a(t) = \frac{1}{t} - 1$ et $A(t) = \ln(t) - t$
  solutions $g_C : t \mapsto Ce^{t-\ln(t)} = \frac{Ce^t}{t}$ avec $C\in\mathbb{R}$
- (SP) $y_0(t) = \frac{C(t)e^t}{t}$: alors $y_0'(t) = C'(t)\frac{e^t}{t} + C(t)\left(\frac{e^t t - e^t}{t^2}\right) = \frac{C(t)e^t}{t} + \frac{C(t)e^t}{t}\left(1-\frac{1}{t}\right)$

  d'où $y_0'(t) + \left(\frac{1}{t}-1\right)y_0(t) = C'(t)\frac{e^t}{t}$. Ainsi y_0 solution $\Leftrightarrow \frac{C'(t)}{t} = \frac{1}{1+t^2}$

  soit $C'(t) = \frac{t}{1+t^2}$. On peut prendre $C(t) = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)$ d'où $y_0(t) = \frac{\ln(1+t^2)e^t}{2t}$

- CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto \left(\frac{2C + \ln(1+t^2)}{2t}\right)e^t \text{ avec } C\in\mathbb{R}}$

- SACRÉ CAUCHY ! Pour une telle fonction, $f(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{2C+\ln(2)}{2}e = 0 \Leftrightarrow 2C = -\ln 2$

  La solution de (E) qui prend la valeur 0 en 1 est $\boxed{f : t \mapsto \ln\left(\frac{1+t^2}{2}\right)\cdot\frac{e^t}{2t}}$

EXO 12 (UN DERNIER PROBLÈME DE CAUCHY POUR LA ROUTE)

Sur $]0,+\infty[$, $(E) \Leftrightarrow y' - \frac{1}{t} y = t^2$

• (EH) $y' - \frac{1}{t} y = 0 \rightsquigarrow a(t) = -\frac{1}{t}$ et $A(t) = -\ln(t)$

solutions : $g_C : t \mapsto Ce^{\ln(t)} = Ct$ avec $C \in \mathbb{R}$

• (SP) $y_0(t) = kt^3$ Alors $y_0'(t) - \frac{1}{t} y_0(t) = 3kt^2 - kt^2 = 2kt^2$

donc y_0 solution $\Leftrightarrow 2k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}$ Ainsi $y_0 : t \mapsto \frac{1}{2} t^3$

CONCLUSION solutions $\boxed{f : t \mapsto Ct + \frac{1}{2} t^3 \text{ avec } C \in \mathbb{R}}$

PB DE CAUCHY Pour une telle fonction $f(1) = 0 \Leftrightarrow C + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

La solution de notre problème de Cauchy est donc $\boxed{f : t \mapsto \frac{t^3 - t}{2}}$